CPGE My Youssef, Rabat

Résumé de cours: *Espaces vectoriels euclidiens*

11 janvier 2010

Blague du jour : Un gendarme fait stopper une automobile :
- Bonjour Monsieur, Vous n'aviez pas vu le feu rouge ? ! !
- Si si Monsieur. C'est plutôt vous, que je n'ai pas vu !

Mathématicien du jour — *Euclide*

Euclide (-325, -265 Av-J.C est un mathématicien de la Grèce antique ayant probablement vécu en Afrique (Alexandrie d'Égypte), auteur des Éléments, qui sont considérés comme l'un des textes fondateurs des mathématiques modernes. Malheureusement, on ne sait rien, ou presque, de celui que l'on peut considérer comme le plus grand enseignant de mathématiques de l'histoire.

Table des matières

Dans tout le résumé de cours, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ou $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension quelconque.

---

1 Produit scalaire.

1.1 Généralités.

Définition 1 *Cas réel.*
On appelle produit scalaire réel sur E toute forme biliéaire définie sur $E \times E$ symétrique définie positive. Autrement dit une application $<,>: E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :
Bilénaire :

$$\begin{array}{l} < x_1 + \lambda x_2, y > = < x_1, y > + \lambda < x_2, y >, \forall (x_1, x_2, y) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ < x, y_1 + \lambda y_2 > = < x, y_1 > + \lambda < x, y_2 >, \forall (x, y_1, y_2) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{array}.$$

Symétrique : $< x, y > = < y, x > . \forall (x, y) \in E^2$.
Définie : $< x, x > = 0 \Rightarrow x = 0_E$.
Positive : $< x, x > \geq 0, \forall x \in E$.

Définition 2 *Cas complexe.*
On appelle produit scalaire Complexe sur E toute forme sesquilinéaire définie définie positive sur $E \times E$. Autrement dit une application $<,>: E \times E \to \mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :
$< x, y > = \overline{< y, x >}\ \forall (x, y) \in E^2$.
linéaire à droite :

$$< x, y_1 + \lambda y_2 > = < x, y_1 > + \lambda < x, y_2 >, \forall (x, y_1, y_2) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{C}\ .$$

Définie : $< x, x > = 0 \Rightarrow x = 0_E$.
Positive : $< x, x > \geq 0, \forall x \in E$.

Vocabulaire.
- On appelle espace pré hilbertien tout espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
- On appelle espace hermitien tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel , de dimension finie, muni d'un produit scalaire complexe.
- On appelle espace hermitien tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel , de dimension finie, muni d'un produit scalaire réel.

Dans toute la suite, E est un espace pré hilbertien.

1.2 Normes et distances.

On définit alors la norme euclidienne sur E ainsi : pour tout $x \in E$ on pose

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >}$$

et on a les propriétés suivantes : $\forall (x, y) \in E^2$
- **Cas réel :** $\begin{array}{rcl} \|x + y\|^2 & = & \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x, y > \\ \|x - y\|^2 & = & \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 < x, y > \end{array}$
- **Cas complexe :** $\begin{array}{rcl} \|x + y\|^2 & = & \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(< x, y >) \\ \|x + iy\|^2 & = & \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathrm{Im}(< x, y >) \end{array}$
- **Inégalité de Cauchy-Schwartz** : $|< x, y >| \leq \|x\| \|y\|$ avec égalité si et seulement si $\{x, y\}$ liée.
- **Identité du parallélogramme**. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.
- **Identités de polarisation**.
  - Cas réel : $\begin{array}{rcl} < x, y > & = & \dfrac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4} \\ & = & \dfrac{\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2} \end{array}$

– Cas complexe :
$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(<x,y>) &= \frac{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2}{4}\\ &= \frac{\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2}{2}\\ \mathrm{Im}(<x,y>) &= \frac{\|x-iy\|^2-\|x+iy\|^2}{4}\\ &= \frac{\|x-iy\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2}{2}\end{aligned}$$

– **Inégalité triangulaire**. $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$.
– **Théorème de Pythagore :** $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2 \Longleftrightarrow <x,y>=0$.

Distance euclidienne. On définit alors la distance euclidienne sur E^2 de la façon suivante : pour tout $(x,y)\in E^2$ on pose :
$$d(x,y)=\|x-y\|$$
On a les propriétés suivantes : $\forall (x,y,z)\in E^3$.
$d(x,x)=0$
$d(x,y)=d(y,x)$
$d(x,y)=0\Rightarrow x=y$
$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$ Inégalité triangulaire

1.3 Orthogonalité.

– **Vecteurs unitaires.** Ce sont les $x\in E$ tel que $\|x\|=1$.
Tout $x\neq 0_E$ peut être normalisé pour obtenir lélement unitaire, $\dfrac{x}{\|x\|}$.
– **Vecteurs orthogonaux.** On dit que deux éléments $(x,y)\in E^2$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul, càd : $<x,y>=0$, on écrit alors : $x\perp y$.
– **Famille orthogonale.** On appelle famille orthogonale, toute famille $(e_i)_{1\leq i\leq m}$ formée par des éléments deux à deux orthogonaux, càd : $<e_i,e_j>=0$ si $i\neq j$.
– **Famille orthonormale.** On appelle famille orthonormale, toute famille orthogonale $(e_i)_{1\leq i\leq m}$ formée par des éléments tous unitaires càd : $<e_i,e_j>=\delta_{i,j}$.

Théorème 1 *Toute famille orthonormale est libre et toute famille orthogonale ne contenant pas d'élément nul est libre.*

Théorème 2 ***Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.*** *De toute famille $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E, on peut construire une famille orthogonale $(e'_i)_{1\leq i\leq n}$, en posant :*
$e'_1=e_1$
$e'_2=e_2+\lambda e'_1$ *avec λ obtenue à l'aide de la relation $<e'_2,e'_1>=0$*
$\vdots$
$e'_n=e_2+\lambda_1 e'_1+\ldots+\lambda_{n-1}e'_{n-1}$ *avec $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}$ obtenues à l'aide des relations : $<e'_n,e'_1>=\ldots=<e'_n,e'_{n-1}>=0$*
qui vérifie en plus $Vect(e_1,\ldots,e_k)=Vect(e'_1,\ldots,e'_k)$, $\forall 1\leq k\leq n$

Corollaire 1 *De toute famille $\mathcal{B}$, on peut construire une famille orthogonale, voir orthonormale, $\mathcal{C}$ de même rang que $\mathcal{B}$.*

Théorème 3 ***Théorème de Pythagore :***
Soit $(e_i)_{1\leq i\leq m}$ une famille orthogonale, alors : $\|e_1+\ldots+e_m\|^2=\|e_1\|^2+\ldots+\|e_m\|^2$.

Dans tout la suite E est un espace euclidien ou hermitien, et les résultats énoncés ne sont pas forcement vraies en dimensions quelconque.

1.4 Bases orthonormales (b.o.n)

Théorème 4 *Tout espace vectoriel euclidien ou hermitien admet un b.o.n*

Théorème 5 *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une b.o.n de E et $x, y \in E$, on a les propriétés suivantes :*

1) $x = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$.

2) $< x, y >= \sum_{i=1}^{n} < x, e_i >< e_i, y >$.

3) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} | < x, e_i > |^2$.

Théorème 6 *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une b.o.n de E, $u \in \mathcal{L}(E)$, et $A = (a_{i,j}) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$, alors $a_{i,j} =< u(e_j), e_i >$.*

1.5 Supplémentaire orthogonale.

Définition 3 *Soit A une partie de E, on appelle l'orthogonal de A, le sous-espace vectoriel de E, noté $A^\perp$, défini par $x \in A^\perp \Longleftrightarrow < x, y >= 0$, $\forall y \in A$.*
On a en particulier $A^\perp = Vect(A)^\perp$ et $A \subset B \Longrightarrow B^\perp \subset A^\perp$.

Théorème 7 *Soit F un sous-espace vectoriel de E, alors $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$.*
En particulier $\dim F^\perp = \dim F$ et $F^{\perp\perp} = F$.

Théorème 8 *Dans un espace euclidien ou hermitien, tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire unique*

Théorème 9 *Toute base orthonormée d'un sous-espace vectoriel F de E, peut être complétée pour obtenir une base orthonormée de E.*

1.6 Projection orthogonale.

Définition 4 *Soit F un sous-espace vectoriel de E, la projection p sur F parallèlement à $F^\perp$, s'appelle la projection orthogonale sur F.*
Dans ce cas, $\forall x \in E$, on a : $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F \perp$.

Théorème 10 *Soit p une application linéaire, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) *p est une projection orthogonale.*

2) *Im $p = \ker p^\perp$.*

3) $\langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$, $\forall x, y \in E$

4) *La matrice A de p dans au moins une base orthonormée de E est symétrique et vérifie $A^2 = A$.*

5) *La matrice A de p dans toute base orthonormée de E est symétrique et vérifie $A^2 = A$.*

1.7 Application : calcul de la distance d'un point à un sous-espace vectoriel .

Principe : Soit F sous-espace vectoriel de E, $x \in E$ et $p(x)$ la projection orthogonale de x sur F, alors

$$d(x, F) = d(x, p(x))$$

Théorème 11 *Si* $\dim F = r$ *et* $(e_i)_{r+1\leq i\leq n}$ *une base orthonormée de* $F^{\perp}$*, alors* $d(x,F)^2 = \sum_{i=r+1}^{n} < x, e_i >^2$.

Dans toute la suite, E est un espace euclidien.

---

2 Adjoint d'un endomorphisme

2.1 Généralités.

Théorème 12 *Pour toute forme linéaire* φ *définie sur* E*, il existe un unique* $a \in E$ *tel que* $\varphi(x) = \langle a, x\rangle$, $\forall x \in E$.

Définition 5 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$*, alors il existe un unique endomorphisme* $u^* \in \mathcal{L}(E)$ *tel que* $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$, $\forall x, y \in E$. u^* *s'appelle l'adjoint de* u.

Proposition 1 *Soit* u *et* v *deux endomorphismes de* E*, on a les propriétés suivantes :*

1) $u^{**} = u$.
2) *Si* F *est un sous-espace vectoriel de* E*, alors* F *est stable par* u *si et seulement si* $F^{\perp}$ *est stable par* u^*.
3) *Si* $\mathcal{B}$ *est une base orthonormée de* E*, alors* $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^t\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$.
4) $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
5) u *est bijective si et seulement si* u^* *bijective, dans ce cas* $(u^*)^{-1} = \left(u^{-1}\right)^*$.
6) $Im\ u^* = (\ker u)^{\perp}$ *et* $\ker u^* = (Im\ u)^{\perp}$.

Remarque 1 *Dans le cas hermitien, tous les résultats ci-dessus sont valables sauf celui de la matrice de l'adjoint* u^* *dans une base orthonormée* $\mathcal{B}$ *qui devient : si* $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$*, alors* $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u^*) ={}^t \overline{A}$.

2.2 Endomorphismes auto-adjoint et matrices symétriques.

Définition 6 *Un endomorphisme* u *est dit auto-adjoint ou symétrique si et seulement si* $u^* = u$

Théorème 13 *Soit* u *un endomorphisme de* E*, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1) u *est auto-adjoint.*
2) $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$, $\forall x, y \in E$.
3) *La matrice de* u *dans au moins une base orthonormée est symétrique.*
4) *La matrice de* u *dans toute base orthonormée est symétrique.*

Théorème 14 . *Tout endomorphisme auto-adjoint est diagonalisable dans une base orthonormée . On dit qu'il est orthogonalement diagonalisable.*

2.3 Automorphismes orthogonales et matrices orthogonales.

Définition 7 *On appelle automorphisme orthogonal de* E*, toute application linéaire* $u : E \to E$ *qui conserve le produit scalaire. càd :* $< u(x), u(y) >=< x, y >, \forall(x, y) \in E^2$.

Théorème 15 *Soit une application linéaire $u : E \to E$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) *u automorphisme orthogonal*
2) *u automorphisme avec $u^* = u^{-1}$.*
3) *u conserve le produit scalaire.*
4) *u conserve la norme i.e : $\|u(x)\| = \|x\|, \forall x \in E$.*
5) *u conserve la distance i.e : $d(u(x), u(y)) = d(x, y), \forall (x, y) \in E^2$*
   On dit aussi que u est un isométrie.
6) *u transforme au moins une base orthonormée en une base orthonormée .*
7) *u transforme toute base orthonormée en une base orthonormée .*
8) *$u^* = u^{-1}$.*

Remarque 2 .
- *La composée de deux automorphismes orthogonaux est un automorphisme orthogonal.*
- *La réciproque d'un automorphisme orthogonal est un automorphisme orthogonal.*
- *L'ensemble des automorphismes orthogonaux est sous-groupe de $GL(E)$, on l'appelle le groupe orthogonal et on le note par $O(E)$.*

Remarque 3 .
- *Si u est un automorphisme orthogonal, alors $\det u = \pm 1$, si $\det u = 1$, on dit que u est un automorphisme orthogonal direct ou positif ou parfois une rotation.*
- *La composée de deux automorphismes orthogonaux direct est un automorphisme orthogonal direct.*
- *La réciproque d'un automorphisme orthogonal direct est un automorphisme orthogonal direct.*
- *L'ensemble des automorphismes orthogonaux directs est sous-groupe de $O(E)$, on l'appelle le groupe orthogonal spécial et on le note par $SO(E)$.*
- *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
  - *u est un automorphisme orthogonal direct.*
  - *u transforme au moins une base orthonormée en une base orthonormée .*
  - *u transforme toute base orthonormée en une base orthonormée .*

Définition 8 *Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si et seulement si elle vérifie l'une des relations suivantes, (qui sont d'ailleurs éequivalentes) : $M^tM = I_n$ ou bien $MM^t = I_n$.*
Autrement dit : M inversible, avec $M^{-1} =^t M$.

Proposition 2 *Le produit de deux matrices orthogonales est orthogonale.*
En particulier, L'ensemble des matrices orthogonales est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$, on l'appelle le groupe orthogonal d'ordre n et on le note $O(n)$.

Théorème 16 *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*
- *M est une matrice orthogonale.*
- *Les colonnes et lignes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour son produit scalaire*
- *A est la matrice d'un endomorphisme orthogonale dans une base orthonormée*
- *A est la matrice de passage entre deux base orthonormée*

Théorème 17 *Toute matrice symétrique A est orthogonalement diagonalisable, i.e :*

$$\exists P \in O(n) \text{ et } D \text{diagonale telles que } A = {}^tPDP$$

Les valeurs propres de A sont toutes réelles.

Remarque 4 *Si $M \in O(n)$, alors $\det(M) = \pm 1$. L'ensemble des matrices orthogonales directes ($\det(M) = 1$), est un sous–groupe de $O(n)$, on l'appelle le groupe spécial d'ordre n et on le note $SO(n)$.*

3 Applications.

3.1 Matrice de Gram.

Définition 9 *Soit $\mathcal{C} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille d'éléments de E, on appelle matrice de Gram de $\mathcal{B}$, la matrice carrée d'ordre p, notée $G(x_1, \dots, x_p)$ et définie par la relation :*

$$G(x_1, \dots, x_p) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq p}$$

Théorème 18 .

1) *Soit $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille d'éléments de E, et G sa matrice de Gram. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et A la matrice de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}$, alors $G = {}^tAA$.*
   En particulier : $rg\mathcal{C} = rgG$ et G est positive et est définie positive quand $\mathcal{C}$ est un base.
2) *Toute matrice définie positive est la matrice de Gram d'une base de E.*

3.2 Méthode des moindres carrés

3.3 Factorisation QR.

Théorème 19 *Toute matrice carré A se décompose sous la forme $A = QR$ où Q est une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure. Cette factorisation est unique quand A est inversible.*

3.4 Factorisation de Cholseky.

Théorème 20 *Toute matrice symétrique définie positive A, se décompose sous la forme $A = L^tL$, où L est une matrice triangulaire inférieure.*

4 Géométrie euclidienne du plan et de l'espace.

4.1 Vocabulaire

– On appelle isométrie affine sur $\mathbb{R}^n$, toute application affine qui conserve les distances, i.e, dont l'application linéaire associée à un automorphisme orthogonal.
– On appelle déplacement affine sur $\mathbb{R}^n$, toute isométrie affine positive (directe), i.e, dont l'application linéaire associée à une rotation.
– On appelle réflexion sur $\mathbb{R}^n$, toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

4.2 Transformation orthogonales du plan.

Théorème 21 *Les déplacements du plan sont soit les translations soit les rotations*

Comment reconnaître un déplacement du plan à partir de son expression analytique

$$\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases}$$

On étudie la matrice associée $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et les points fixes solutions su système $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$
Si $M = I_2$, alors il s'agit d'une translation de vecteur (e, f)
Sinon on vérifie d'abord que M est une matrice orthogonale.
Si $\det M = 1$, il s'agit d'une rotation $r_{\omega,\theta}$ où ω le point fixe et θ déterminée à l'aide de la relation $a = \cos\theta,\ b = \sin\theta$.
Propriétés des rotations du plan.

- $r_\theta \circ r_{\theta'} = r_{\theta+\theta'}$.
- $r_\theta^{-1} = r_{-\theta}$.
- $< x, y >= \|x\| \, \|y\| \cos\theta, \det(x, y) = \|x\| \, \|y\| \sin\theta, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ faisant un angle θ entre eux.
- Toute rotation du plan d'angle θ peut être décomposeé en deux réflexions dont les axes font un angle $\frac{\theta}{2}$ entre eux.

- $\det(x, y)$ est égal à la surface du parallélogramme de cotés x et y.

4.3 Transformation orthogonales de l'espace.

Théorème 22 *Les déplacements de l'espace sont soit les translations soit les rotations soit les vissage*

Comment reconnaître un déplacement de l'espace à partir de son expression analytique $X' = MX + b$
- Si $M = I_3$, il s'agit alors d'une translation de vecteur b.
- Sinon, on vérifie que M est une matrice orthogonale, pour cela on considère ses colonnes C_1, C_2, C_3 et on vérifier que $\|C_1\| = \|C_2\| = 1, < C_1, C_2 >=< C_1, C_3 >=< C_2, C_3 >= 0$.
Si $C_1 \wedge C_2 = C_3$, alors $\det M = 1$.
- On cherche après l'ensemble des points fixes solutions de l'équation $X = MX + b$.
- Si on trouve une droite Δ, il s'agit alors d'une rotation $r_{\Delta,\theta}$ où θ est donné par les relation $\mathrm{tr} M = 1 + 2\cos\theta$ et signesin θ=signedet$(\vec{i}, C_1, \vec{a}$ où $\vec{a}$ vecteur qui dirige Δ.
- Si on trouve l'ensemble vide, il s'agit alors d'un vissage, i.e $r_{\Delta,\theta} \circ t_{\vec{u}}$ tel que $\vec{u} \parallel \Delta$.
- On commence d'abord par déterminer la direction de Δ dirigé par un vecteur $\vec{a}$ solution de l'équation $MX = X$
- On trouve l'équation de Δ à l'aide de la relation $(X' - X) \wedge \vec{a} = \vec{0}$.
- On trouve le vecteur $\vec{u}$ de la translation à l'aide de la formule $\vec{a} = X' - X$ où $X \in \Delta$.
- On trouve l'angle de la rotation à l'aide de la trace et le déterminant comme ci-dessus.

Propriétés des rotations de l'espace.
- Toute rotation de l'espace se décompose en produit de deux réflexions.
- $< x, y >= \|x\| \, \|y\| \cos\theta, \|x \wedge y\| = \|x\| \, \|y\| \sin\theta, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ faisant un angle θ entre eux.
- Soit r la rotation d'axe Δ dirigé par a et d'angle θ, alors $\forall x \perp \Delta$ on a : $r(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)a \wedge x$.

Fin
À la prochaine