XM6-CPGE My Youssef

Résumé de cours
Intégrales multiples et curvilignes

Rabat le 4 avril 2010

Blague du jour :

Un homme demande à un commercial : "quel est le montant de vos honoraires ?"
Le commercial lui répond qu'il est de 10 000 Dhs pour trois questions.
l'homme lui demande alors : "n'est-ce pas un peu excessif ?"
le commercial lui répond : "Si. Quelle est votre troisième question ?"

Mathématicien du jour **Green**
George Green (1793-1841), physicien britannique. L'histoire de sa vie a ceci d'exceptionnel qu'il était presque totalement autodidacte : il n'a passé qu'un an environ à l'école, entre 8 et 9 ans. Au cours de sa vie adulte, George Green a travaillé dans le moulin de son père, il intégra l'université comme étudiant à l'âge de 40 ans. Le travail de Green fut peu reconnu par la communauté mathématique au cours de sa vie. Il fut redécouvert en 1846 par Lord Kelvin, qui le fit connaître.

Remerciements : à David Delaunay (Paris) pour la source de ce résumé de cours.

1 Intégrales multiples

1.1 Intégrales doubles

Théorème de Fubini (sur un rectangle)

• Soient $a < b$ et $c < d$ et $f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue alors les fonctions $x \mapsto \int_c^d f(x, y)dy$ et $y \mapsto \int_a^b f(x, y)dx$ sont continues avec
$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx\right) dy$$
• La valeur commune de ces deux intégrales est appelée intégrale (double) de f sur $[a, b] \times [c, d]$, on la note $\iint_{[a,b]\times[c,d]} f$ ou $\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)dxdy$

Définition

• Une partie Δ du plan $\mathbb{R}^2$ est dite x-élémentaire si on peut écrire
$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$
avec $a < b$ et $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonctions continues vérifiant $\forall x \in]a, b[, \varphi_1(x) < \varphi_2(x)$.
• Pour toute fonction $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ continue, on pose
$$\iint_\Delta f(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy\right) dx.$$

Définition

• Une partie Δ du plan $\mathbb{R}^2$ est dite y-élémentaire si on peut écrire
$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$
avec $c < d$ et $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonctions continues vérifiant $\forall y \in]c, d[, \psi_1(y) < \psi_2(y)$.
• Pour toute fonction $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ continue, on pose
$$\iint_\Delta f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx\right) dy.$$

Théorème de Fubini (cas d'une partie élémentaire)

Une partie Δ du plan $\mathbb{R}^2$ est dite élémentaire si elle à la fois x et y-élémentaire. Dans ce cas pour toute fonction $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ continue, on a :

$$\iint_\Delta f(x,y)\,dy\,dx = \iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy.$$

Cette valeur commune est appelée intégrale double de f sur Δ et est notée $\displaystyle\iint_\Delta f$.

Définition

Une partieΔ de $\mathbb{R}^2$ est dite simple si elle est réunion d'une famille finie non vide de parties élémentaires d'intérieurs deux à deux disjoints :

$$\Delta = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i \text{ avec } \Delta_1, \dots, \Delta_n \text{ élémentaires et } i \neq j \Longrightarrow \mathring{\Delta}_i \cap \mathring{\Delta}_j = \emptyset.$$

Dans ce cas, pour toute fonction $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ continue, on appelle intégrale double de f sur Δ le scalaire : $\displaystyle\iint_\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \iint_{\Delta_i} f$ (ne dépond pas du choix des Δ_i).

Propriétés :

- $\displaystyle\iint_\Delta (\lambda f + \mu g) = \lambda \iint_\Delta f + \mu \iint_\Delta f \iint_\Delta g,$
- $\displaystyle f \geq 0 \Longrightarrow \iint_\Delta f \geq 0,$
- $\displaystyle f \geq 0 \text{ et } \iint_\Delta f = 0 \Longrightarrow f = 0,$
- $\displaystyle \left| \iint_\Delta f \right| \leq \iint_\Delta |f|,$
- $\displaystyle \mathring{A} \cap \mathring{B} = \emptyset \Longrightarrow \iint_{A \cup B} f = \iint_A f + \iint_B f.$

Rappel : Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi : U \longrightarrow V$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. $\varphi(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$. Le jacobien de φ en (x,y) est noté

$$J_\varphi(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Théorème : Formule de changement de variables

Soit Δ est une partie incluse dans U. Si Δ et $\varphi(\Delta)$ sont des parties simples de $\mathbb{R}^2$ alors pour toute fonction $f : \varphi(\Delta) \longrightarrow \mathbb{C}$ continue on a la relation :

$$\iint_{\varphi(\Delta)} f(u,v)\,du\,dv = \iint_\Delta f(u(x,y), v(x,y))|J_\varphi(x,y)|\,dx\,dy.$$

Remarques :

- En coordonnées polaires $dxdy$ devient $rdrd\theta$,
- L'aire d'une partie simple Δ se calcule avec la formule suivante :
$$\mathcal{A}ire(\Delta) = \iint_\Delta dxdy.$$
- En coordonnées polaires, la formule du calcul d'aire devient :
$$\mathcal{A}ire(\Delta) = \iint_{\varphi^{-1}(\Delta)} rdrd\theta.$$

1.2 Intégrales triples

Remarques :

- Les mêmes règles utilisées pour définir une intégrale double à partir d'une intégrale simple sont encore applicable pour définir une intégrale triple à partir d'une intégrale double,
- Les propriétés vérifiées par une intégrale double (linéaire, positive, croissante, additive) sont encore vérifiées par les intégrales triples,
- Le volume d'une partie simple Δ se calcule avec la formule suivante :
$$\mathcal{V}ol(\Delta) = \iiint_\Delta dxdydz,$$
- En coordonnées cylindriques $dxdydz$ devient $rdrd\theta d\varphi$,
- En coordonnées sphériques $dxdydz$ devient $r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi$,

2 Formes différentielles

2.1 Généralités

Dans toute la suite U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition

On appelle **forme différentielle** définie sur U toute application continue

$$\omega : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*.$$

Remarques fondamentales :

• Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ alors df est une forme différentielle sur U. Si de plus f est linéaire alors $df = f$,

• Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ sa base duale : $e_i^* : M = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$, on a $de_i^*(M) = e_i^*$. Toute forme différentielle ω définie sur U s'écrit sous la forme $\omega(M) = \sum_{i=1}^{n} P_i(M) e_i^*$, pour alléger la notation on note $e_i^* = x_i$, on a $dx_i = x_i = e_i^*$, l'écriture devient alors :

$$\omega(M) = \sum_{i=1}^{n} P_i(M) dx_i$$

où $M \in U$, $P_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ continues,

• Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, la formule suivante devient :

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Définition

• Une forme différentielle $\omega = \sum_{i=1}^{n} P_i dx_i$ définie sur U est dite **exacte** s'il existe $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\omega = df$ i.e. $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, on a : $\frac{\partial f}{\partial x_i} = P_i$, On dit alors que f est une primitive de ω,

• Une forme différentielle $\omega = \sum_{i=1}^{n} P_i dx_i$ définie sur U est dite **fermée** si elle vérifie $\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}$, $\forall i, j$.

Théorème

• Toute forme différentielle exacte est fermée,

• Toute forme différentielle fermée sur un ouvert étoilé est exacte, (de Poincaré)

On rappelle que U est dit **étoilé**, s'il existe $A \in U$ tel que $\forall M \in U$, on a $[A, M] \subset U$.

2.2 Intégrales curvilignes

Définition

Soit $\omega = \sum_{i=1}^{n} P_i dx_i$ une forme différentielle définie sur U et $(\gamma) = ([a, b], M)$ un arc de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux inscrit dans U i.e. telle que $\forall t \in I$ on a : $M(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in U \subset \mathbb{R}^n$.

On appelle intégrale curviligne de ω le long de l'arc orienté (γ) le réel :

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \sum_{i=1}^{n} P_i dx_i = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b P_i(M(t)) x_i'(t) dt,$$

Lorsque l'arc (γ) est fermé (i.e. $M(a) = M(b)$), on note $\oint_\gamma \omega$.

théorème

Si ω est une forme différentielle exacte sur U de primitive f, i.e : $\omega = df$ et (γ) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux d'extrémités A et B alors $\int_\gamma = f(B) - f(A)$.

En particulier si (γ) est fermé, alors $\oint_\gamma \omega = 0$.

Théorème : Formule de Green-Riemann

Soit D une partie simple compacte non vide de $\mathbb{R}^2$ dont le bord ∂D^+ est parcouru dans le sens direct. Soit $\omega(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert U contenant D on a alors :

$$\oint_{\partial D^+} \omega = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

En particulier si ω est fermée, alors $\oint_{\partial D^+} \omega = 0$.

Remarque : La formule de Green-Riemann permet de calculer l'aire d'une partie simple compacte D, a l'aide des formule suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}ire(D) &= \oint_{\partial D^+} x dy &= -\oint_{\partial D^+} y dx \\ &= \frac{1}{2} \oint_{\partial D^+} (x dy - y dx) &= \frac{1}{2} \oint_{\partial D^+} r^2 d\theta \end{aligned}$$

Fin