XM6-CPGE My Youssef

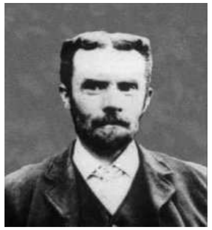
Résumé de cours

Intégrales à un paramètre

Rabat le 18 février 2010

Blague du jour :

Dans une équipe de football, l'entraîneur dit à un joueur :
- Aujourd'hui, tu vas jouer avant.
- Ah non ! Moi, je veux jouer avec les autres !



Mathématicien du jour **Heaviside**

Oliver Heaviside (1850-1925) était un physicien britannique autodidacte. Il a formulé à nouveau et simplifié les équations de Maxwell sous leur forme actuelle utilisée en calcul vectoriel. Il développa le calcul opérationnel, une méthode pour résoudre des équations différentielles en les transformant en des équations algébriques ordinaires

Remerciements : à Mr Sadik Boujaida (Rabat) pour la source latex de ce résumé de cours.

Dans tous le document I désignera un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Théorèmes généraux.

1.1 Continuité

Théorème.

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et A une partie non vide de $\mathbb{R}^m$.
On considère une fonction $f : A \times I \to \mathbb{K}$, et une fonction continue par morceaux positive intégrable $\varphi : I \to \mathbb{R}$.
Si

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } A \times I \\ \forall (x,t) \in A \times I,\ \|f(x,t)\| \leqslant \varphi(t) \qquad \text{(hypothèse de domination)} \end{cases}$$

Alors la fonction $g : x \longmapsto \int_I f(x,t)dt$ est définie et continue sur I.

remarques :

Avec les notations du théorème précédent, si I est un segment, la continuité de f sur $A \times I$ suffit pour justifier celle de g sur A. (Pas besoin de domination).

Noter la similitude des données du théorème avec la convergence normale d'une série de fonctions :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I,\ |u_n(x)| \leq a_n \text{ et la série } \sum a_n \text{ converge.}$$

vs.

$$\forall (x,t) \in A \times I,\ |f(x,t)| \leq \varphi(t) \text{ et } \varphi \text{ est une fonction intégrable sur } I.$$

Comme pour les séries de fonctions, on peut le cas échéant effectuer des dominations sur les parties $K \times I$, K étant un compact quelconque de A.

1.2 Dérivation

Théorème.

Soit K et I deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$. On considère une fonction $f : K \times I \longrightarrow \mathbb{K}$ et des fonctions continue par morceaux positives intégrables $\varphi, \psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si :

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } I \text{ et admet une dérivée partielle } \dfrac{\partial f}{\partial x} \text{ continue sur } I \\ \forall (x,t) \in K \times I,\ |f(x,t)| \leq \varphi(t) \\ \forall (x,t) \in K \times I,\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \psi(t) \end{cases}$$

Alors la fonction $g : x \longmapsto \int_I f(x,t)dt$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur K et :

$$\forall x \in K,\ g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$

Remarques.

Dans la démonstration, on n'a pas utilisé l'hypothèse de domination de f, néanmoins elle sert à justifier que g est bien définie sur K. On peut se dispenser de sa vérification si on démontre séparément que g est bien définie sur K.

Dans le cas où I est un segment, il suffit que f soit continue sur $K \times I$ et admette une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $K \times I$ pour que g soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur K. (Là aussi pas besoin de domination).

Avec les données du théorème précédent on se donne un entier $k \in \mathbb{N}^*$, et on suppose qu'il existe des fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_k$ continue par morceaux positives intégrables sur I telles que :

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } I \\ f \text{ admet des dérivées partielles } \dfrac{\partial^i f}{\partial x^i} \text{ continues sur } I,\ i \in [\![1, k]\!] \\ \forall i \in [\![0, k]\!], \forall (x,t) \in K \times I,\ |f(x,t)| \leq \varphi_i(t) \end{cases}$$

Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur K et :

$$\forall i \in [\![1, k]\!], \forall (x,t) \in K \times I,\ g^{(i)}(x) = \int_I \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)dt$$

2 Transformée de Laplace

Définitions.

- Fonction de Heaviside ou Échelon unité : $U(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$
- Fonction causale : nulle sur $\mathbb{R}_-^*$.
- Transformée de Laplace de f, causale : $\mathcal{L}f(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t)e^{-xt}dt$.
- f s'appelle l'original de $\mathcal{L}f$.
- le produit de convolution de f et de g noté $f * g$ est la fonction définie par

$$f * g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$$

Propriétés.

- $\mathcal{L}(f + \lambda g) = \mathcal{L}f + \lambda\mathcal{L}g$.
- $\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}f.\mathcal{L}g$.
- $\mathcal{L}(U(x-a)f(x-a)) = \mathcal{L}f(x)e^{-xa}$.
- $\mathcal{L}(U(x)f'(x)) = x\mathcal{L}f(x) - f(0^+)$.
- $\mathcal{L}(U(x)\displaystyle\int_0^x f(t)dt) = \mathcal{L}f(x)e^{-xa}$.
- $\mathcal{L}(U(x)) = \dfrac{1}{x}$.
- $\mathcal{L}(U(x)e^{-ax}) = \dfrac{1}{x+a}$.
- $\mathcal{L}(U(x)x^n) = \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.
- $\mathcal{L}(U(x)\cos \omega x) = \dfrac{x}{x^2 + \omega^2}$.
- $\mathcal{L}(U(x)\sin \omega x) = \dfrac{\omega}{x^2 + \omega^2}$.

Fin

À la prochaine