بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ
المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Résumé de cours: *Réduction d'endomorphismes*

4 octobre 2009

Blague du jour
On se propose de démontrer que π est irrationnel. En effet, aprés simplification, vu que *cheval*=$\beta\pi$ =*bête à pieds* et que *oiseau*=$\beta\ell$ =*bête à ailes*. On a :

$$\pi = \frac{cheval}{oiseau}.$$

Alors, comme il n'y a aucune mesure entre le cheval et l'oiseau, π est incommensurable, ou comme on le dit plus familièrement dans le jargon mathématique, il est irrationnel...

Mathématicen du jour ***Hamilton***
Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) est un mathématicien, physicien et astronome irlandais. Il est connu pour sa découverte des quaternions, mais il contribua aussi au développement de l'optique, de la dynamique et de l'algèbre. Ses recherches se révélèrent importantes pour le développement de la mécanique quantique.
Enfant prodige ; son génie se révéla tout d'abord dans sa capacité à apprendre les langues. À l'âge de 7 ans, il a déjà fait des progrès considérables en hébreu et, à l'âge de 13 ans, il parlait déjà 13 langues dont le persan, l'arabe, l'hindousthânî, le sanskrit et le malais.

Dans tout ce résumé de cours, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , $u \in \mathcal{L}(E)$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Notion de sous-espace vectoriel u-stables.

1.1 Généralités.

Définition 1
Un sous-espace vectoriel F de E est dit stable par u, ou u-stable si et seulement si $u(F) \subset F$. Dans ce cas la réstriction de u à F induit un endomorphisme qu'on note par $u_{|F}$.

Remarque 1

- **Pour montrer qu'un sous-espace vectoriel F de E est dit u-stable, il est pratique de montrer que $x \in F \Longrightarrow u(x) \in F$.**
- **La somme et l'intersection de sous-espaces u-stables sont u-stables.**
- **Si v est un autre endomorphisme de E commutant avec u, (i.e., $u \circ v = v \circ u$, alors $\ker v$ et Im v sont u-stables.**
  En général $\ker P(v)$ et Im $P(v)$ sont u-stables, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.
- **$\ker P(u)$ et Im $P(u)$ sont u-stables, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.**
  En particulier, si $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$, alors le sous-espace propre associé, $E_\lambda = \ker(u - \lambda \mathrm{id}_E)$ est u-stable.

1.2 Caractérisation matricielle.

Soit $(F_i)_{1 \leq i \leq r}$ des sous-espace vectoriel de E tels que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$, si on choisit pour tout F_i une base $\mathcal{B}_i$, alors $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^r \mathcal{B}_i$ est une base de E dite base adapté à l'écriture $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$.

Théorème 1

- **Soit F et G sont deux sous-espace vectoriel de E tels que $E = F \oplus G$. Alors :**
  - **F est u-stable $\Longleftrightarrow \exists \mathcal{B}$ base de E adaptée à cette écriture telle que $\mathcal{M}_u(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$**

Fin
à la prochaine