

CPGE My Youssef, Rabat



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
وَقُلْ اِعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَ
الْمُؤْمِنُونَ

صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمِ

Résumé de cours: *Révision Algèbre Linéaire*
Programme Sup

14 août 2009

Blague du jour

Une femme arrive et voit son mari avec une tapette à mouche...

- Que fais-tu ?
- Je chasse les mouches... - En as-tu tué ?
- Oui, 3 mâles, 2 femelles

Intriguée, elle lui demande : Comment fais-tu la différence entre les femelles et les mâles ?

3 étaient sur la cafetière et 2 sur le téléphone.



Mathématicien du jour

Al-Khwarizmi

Al-Khwarizmi, (783-850), est un mathématicien, géographe, astrologue et astronome musulman arabophone d'origine *ouzbakistan*, plus précisément de la ville *khiva*, appelé jadis *Khwarezm*.

Il est à l'origine des mots *algorithme* (qui n'est autre que son nom latinisé) et *algèbre* (issu d'une méthode et du titre d'un de ces ouvrages) ou encore de l'utilisation des chiffres arabes et de l'habitude de désigner l'inconnue par la lettre *x* dans une équation.

Son apport en mathématiques fut tel qu'il est également surnommé *le père de l'algèbre*, avec *Diophante* dont il reprendra les travaux. En effet, il fut le premier à répertorier de façon systématique des méthodes de résolution d'équations en classant celles-ci.

Table des matières

1	Structures d'espaces vectoriels.	3
1.1	Structures.	3
1.2	Familles particulières.	3
1.3	Notion de dimension.	5
2	Polynômes.	6
2.1	Degré d'un polynôme.	6
2.2	Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$	6
2.3	Racines d'un polynôme.	7
2.4	Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$	8
2.5	Polynômes scindés.	9
3	Applications linéaires.	10
3.1	Généralités.	10
3.2	Applications linéaires en dimension finie.	11
3.3	Rang d'une application linéaire	11
4	Somme d'espaces vectoriels.	12
4.1	Généralités.	12
4.2	Projection et projecteur.	12
4.3	Symétries.	13
5	Matrices.	13
5.1	Généralités.	13
5.1.1	Trace d'une matrice carré.	13
5.1.2	Transposée d'une matrice.	13
5.2	Matrices en tant qu'applications linéaires.	14
5.3	Matrice d'une application linéaire.	14
5.4	Matrice de passage entre deux bases.	15
5.5	Matrice d'une famille de vecteurs dans une base	15
5.6	Matrice de passage entre deux bases	16
6	Déterminants.	16
6.1	Formes n -linéaires.	16
6.1.1	Formes bilinéaires.	16
6.1.2	Formes n -linéaires.	17
6.2	Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base donnée.	18
6.2.1	Généralités.	18
6.2.2	Orientations d'un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie.	18
6.3	Déterminant d'un endomorphisme.	18
6.4	Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n	19

Dans tout le résumé de cours \mathbb{K} désigne un sous-corps de \mathbb{C} , en général $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1 Structures d'espaces vectoriels.

1.1 Structures.

Définition 1

On dit qu'un ensemble E est un \mathbb{K} -ev s'il est muni d'une LCI $+$ et d'une LCE \cdot à coefficients dans \mathbb{K} , vérifiant les axiomes suivants :

- $(E, +)$ est un groupe abélien, dont l'élément neutre sera noté dorénavant par 0_E .
- $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x, \quad \forall x \in E, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2.$
- $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y, \quad \forall (x, y) \in E^2, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}.$
- $\alpha(\beta.x) = (\alpha\beta).x, \quad \forall x \in E, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2.$
- $1.x = x, \quad \forall x \in E.$

Définition 2

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, une partie F de E est dite sous-espace vectoriel de E si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- $0_E \in F.$
- $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ on a : $x + \lambda y \in F.$

Autrement dit F est une partie de E stable pour les deux lois $+$ et \cdot et qui hérite de E sa structure d'espace vectoriel.

Remarque 1

Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, il est plus judicieux de remarquer qu'il est inclus dans un espace vectoriel, puis montrer que c'en est un sous-espace vectoriel.

Définition 3

On appelle algèbre sur \mathbb{K} , tout ensemble A muni de deux lois de composition interne $+, \times$ et d'une loi de composition externe \cdot , telle que :

- 1) $(A, +, \cdot)$ soit un \mathbb{K} -ev
- 2) $(A, +, \times)$ soit un anneau, dont l'élément neutre pour la 2ème loi est noté 1_A .
- 3) $\forall (x, y) \in A^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, on a : $\lambda.(x \times y) = (\lambda.x) \times y = x \times (\lambda.y)$

Définition 4

Soit A une algèbre, une partie B de A est dite sous-algèbre de A si elle vérifie les propriétés suivantes :

- $1_A \in B.$
- $\forall (x, y) \in B^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ on a : $x + \lambda y \in B$ et $x \times y \in B.$

Autrement dit B est une partie de A stable pour les deux lois internes et celle externe, et qui hérite de A sa structure d'algèbre.

1.2 Familles particulières.

Définition 5

Soit E un \mathbb{K} -ev, $x \in E, n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_k)_{1 \leq k \leq n} \in E^n$ une famille de vecteurs de E . On dit que x est une combinaison linéaire de x_k si

$$\exists (\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k.$$

Définition 6

L'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ est un sous-espace vectoriel de E , s'appelle le sous-espace vectoriel de E engendré par $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ et se note $\text{Vect}((x_k)_{1 \leq k \leq n})$. Autrement dit

$$x \in \text{Vect}((x_k)_{1 \leq k \leq n}) \iff \exists (\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k.$$

Proposition 1

- Soit \mathcal{B} une famille d'éléments de E , alors $\text{Vect}(\mathcal{B})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant la famille \mathcal{B} .
- Par convention on écrit, $\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$.

Définition 7

Une famille \mathcal{B} est dite génératrice de E si et seulement si tout élément de E s'écrit combinaison linéaire d'éléments de \mathcal{B} , Autrement dit $\text{Vect}(\mathcal{B}) = E$.

Ainsi pour montrer que $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une famille génératrice de E , il suffit de montrer que $\forall x \in E, \exists (\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$.

Définition 8

Une famille est dite liée lorsque l'un de ses éléments est combinaison linéaire des autres.

Proposition 2

- 1) Toute famille contenant un élément nul est liée.
- 2) Toute famille où un élément se répète au moins deux fois est liée.
- 3) Toute famille contenant une famille liée est aussi liée.
- 4) L'image par une application linéaire d'une famille liée est aussi liée.

Définition 9

Une famille sera dite libre lorsqu'elle n'est pas liée, autrement dit aucun de ses éléments n'est combinaison linéaire des autres.

Théorème 1

Une famille $\mathcal{B} = (x_k)_{1 \leq k \leq n}$ est libre si et seulement si

$$\forall (\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^n, \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0_E \Rightarrow \lambda_k = 0.$$

Et on peut surtout en conclure que si deux combinaisons linéaires d'une famille libre sont égales alors leurs coefficients sont égaux.

Proposition 3

- 1) Une famille formée par un seul élément est libre si et seulement si cet élément n'est pas nul.
- 2) Une famille formée par deux éléments est libre si et seulement si ces deux éléments ne sont pas proportionnels.
- 3) Toute famille contenue dans une famille libre est aussi libre.

Définition 10

On appelle base toute famille à la fois libre et génératrice.

Théorème 2

Soit $\mathcal{B} = (x_k)_{1 \leq k \leq n}$ une base de E et $x \in E$, alors

$$\exists! (\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k.$$

Les coefficients $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$ s'appellent coordonnées de x dans la base \mathcal{B} .

1.3 Notion de dimension.

Définition 11

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet au moins une famille génératrice finie.

Théorème 3 *Théorème de la base incomplète*

Toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie peut être complétée par des éléments de n'importe quelle famille génératrice finie pour avoir une base.

Corollaire 1

Tout espace vectoriel de dimension finie admet au moins une base finie.

Théorème 4

Soit \mathcal{B} et \mathcal{C} deux familles finies d'éléments d'un \mathbb{K} -espace vectoriel. On a les propriétés suivantes :

- Si \mathcal{B} est génératrice et $\text{card}\mathcal{C} > \text{card}\mathcal{B}$, alors \mathcal{C} est liée.
- Si \mathcal{B} est génératrice et \mathcal{C} est libre, alors $\text{card}\mathcal{C} \leq \text{card}\mathcal{B}$.
- Si \mathcal{B} et \mathcal{C} sont deux bases de E , alors $\text{card}\mathcal{C} = \text{card}\mathcal{B}$.

Théorème 5

Dans un \mathbb{K} -ev, E , de dimension finie toutes les bases sont finies et ont même cardinal, leur cardinal commun s'appelle base de E et se note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$.

Théorème 6

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E . Si E est de dimension finie, alors F l'est aussi tel que $\dim F \leq \dim E$, avec égalité si et seulement si $E = F$.

Théorème 7

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, \mathcal{B} une famille d'éléments de E . On a les propriétés suivantes :

- Si \mathcal{B} est génératrice, alors $\text{card}\mathcal{B} \geq \dim E$, avec égalité si et seulement si \mathcal{B} est une base de E .
- Si \mathcal{B} est libre, alors $\text{card}\mathcal{B} \leq \dim E$, avec égalité si et seulement si \mathcal{B} est une base de E .

Définition 12

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et \mathcal{B} une famille d'éléments de E , le rang de \mathcal{B} , noté $\text{rg}(\mathcal{B})$ est défini par la relation suivante :

$$\text{rg}(\mathcal{B}) = \dim \text{Vect}(\mathcal{B}).$$

Définition 13

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et \mathcal{B} une famille d'éléments de E , alors

$$\text{rg}(\mathcal{B}) \leq \text{card}(\mathcal{B}).$$

Avec égalité si et seulement si \mathcal{B} est libre.

2 Polynômes.

2.1 Degré d'un polynôme.

Définition 14 Soit P un polynôme non nul, de coefficients a_k , on appelle degré de P , le plus grand indice de ses coefficients non nuls, et on le note $\deg P$.

Ce coefficient non nul d'indice maximal, s'appelle le coefficient dominant de P et se note $\text{co}(P)$.

Par convention $\deg 0 = -\infty$.

L'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} se note $\mathbb{K}[X]$, celui des polynômes de degré inférieur à n , se note $\mathbb{K}_n[X]$.

Remarque 2

– $\deg P = n \iff P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$ avec $a_n \neq 0$.

– $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0 \iff \deg P \leq n$.

Proposition 4

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a les propriétés suivantes :

– $\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$, avec égalité dans le cas où $\deg P \neq \deg Q$ ou bien $\deg P = \deg Q$ mais $\deg P + \deg Q \neq 0$.

– $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$

2.2 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$.

Définition 15

Soit A, B deux polynômes non nuls.

– On dit que B divise A dans $\mathbb{K}[X]$ si $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.

– On dit que A et B sont associés si $\exists \lambda \neq 0$ tel que $P = \lambda Q$.

– Un polynôme est dit irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ quand ses seuls diviseurs dans $\mathbb{K}[X]$ sont les constantes et ses polynômes associés.

Proposition 5

Deux polynômes P et Q sont associés si et seulement si P divise Q avec $\deg P = \deg Q$.

En particulier tout polynôme de degré 1 est irréductible.

Théorème 8

$\forall (A, B) \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B \neq 0 \quad \exists!(Q, R) \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B$.

Q s'appelle le quotient de la division euclidienne de A par B et R son reste.

Remarque 3

B divise A si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

Algorithme d'Euclide.

Soit A, B deux polynôme non nuls, on effectue les divisions euclidiennes successives des quotients par leurs restes, jusqu'à arriver à un reste nul, alors le dernier reste non nul est un diviseur commun de A et B de degré minimal, ce reste un fois normalisé, s'appelle le PGCD de A et B et se note $A \wedge B$.

Définition 16

Deux polynômes sont dits premiers entre eux si et seulement si leur PGCD est égal à 1.

Proposition 6 Soient P et Q deux polynômes non nuls, et D leurs PGCD, alors

$$P = DP', Q = DQ' \text{ avec } Q \wedge Q' = 1$$

Théorème 9 *Théorème de Bezout.*

Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]$, alors

$$A \wedge B = 1 \iff \exists (A, B) \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } AU + BV = 1$$

Théorème 10 *Théorème de Gauss.*

Soit $(A, B, C) \in \mathbb{K}[X]$ tel que A divise BC et $A \wedge B = 1$ alors A divise C .

Corollaire 2

- $A \wedge B = A \wedge C = 1 \implies A \wedge BC = 1$.
- $A \wedge B = 1 \iff A \wedge B^\beta = 1 \iff A^\alpha \wedge B^\beta = 1$.
- *Si A et B divisent C et sont premiers entre eux, alors AB divise C .*

2.3 Racines d'un polynôme.

Définition 17

A chaque polynôme $P(X) = a_n X^n + \dots + a_0 \in \mathbb{K}[X]$, on associe la fonction réelle :

$$\begin{aligned} \hat{P}(x) : \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto a_n x^n + \dots + a_0 \end{aligned}$$

appelée fonction polynomiale de P et on dit que $\alpha \in K$ est une racine de P si et seulement si $\hat{P}(\alpha) = 0$, dans la suite on notera $P(\alpha) = 0$ au lieu de $\hat{P}(\alpha)$.

Théorème 11

Soit $P \in \mathbb{K}[X], \alpha \in K$, alors α est une racine de P si et seulement si $X - \alpha$ divise P dans $\mathbb{K}[X]$.

Théorème 12 *Théorème de D'Alembert*

Tout polynôme, non constant admet au moins une racine dans \mathbb{C} .

Corollaire 3

- *Un polynôme irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ de degré ≥ 2 n'admet jamais de racine dans \mathbb{K} .*
- *Un polynôme, non nul de degré $n \in \mathbb{N}$ admet au maximum n racines.*
- *Tout polynôme qui admet un nombre de racines supérieur strictement à son degré est nul, en particulier tout polynôme qui admet une infinité de racines est nul.*

Théorème 13

Tout polynôme, non constant admet au moins un facteur (diviseur) irréductible.

Théorème 14

Tout polynôme, non constant, P se décompose de façon unique en facteurs irréductibles sous la forme

$$P = \lambda P_1^{\alpha_1} \dots P_r^{\alpha_r}$$

avec $\lambda \in \mathbb{K}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ et P_i des polynômes irréductibles unitaires.

Corollaire 4

- Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1. En particulier la décomposition de P dans $\mathbb{C}[X]$ est de la forme

$$P(X) = \lambda(X - z_1)^{\alpha_1} \dots (X - z_r)^{\alpha_r}$$

où les z_i sont les racines de P .

- Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1 ou ceux de degré 2 à discriminant strictement négatif. En particulier la décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$ est de la forme

$$P(X) = \prod_{i=1}^r \lambda(X - x_i)^{\alpha_i} \prod_{i=1}^p (X^2 - 2\Re(z_i)X + |z_i|^2)^{\beta_i}$$

où les x_i sont les racines réelles de P et z_i ceux complexes non réelles.

Il faut noter que si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ racine de P , alors \bar{z} aussi racine de P .

2.4 Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$.

Définition 18

Soit $P(X) = a_n X^n + \dots + a_0$, on appelle polynôme dérivé de P , le polynôme noté P' défini par $P'(X) = n a_n X^{n-1} + \dots + a_1$.

Proposition 7

- Si $\deg P = n$, alors $\deg P' = n - 1$ et $\text{co}(P') = n \text{co}(P)$. En particulier la dérivée d'un polynôme est nul si et seulement si il est constant.
- $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$, on a : $(P + \lambda Q)' = P' + \lambda Q'$, en conséquence l'application :

$$\begin{aligned} K_n[X] &\longrightarrow K_{n-1}[X] \text{ est linéaire.} \\ P(X) &\longmapsto P'(X) \end{aligned}$$

Définition 19

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on définit par récurrence la dérivée k -ème de P à l'aide de la formule $P^{(k)} = (P^{(k-1)})' = (P')^{(k-1)}$.
Et on convient d'écrire $P^{(0)} = P$.

Proposition 8

- Si $\deg P = n$, alors $\deg P^{(k)} = n - k$ et $\text{co} P^{(k)} = A_n^k \text{co} P$, avec la convention $A_n^k = 0$ si $k > n$.
En particulier la dérivée k -ème d'un polynôme est nul si et seulement si ce polynôme est de degré inférieur à $k - 1$.
- Si $\deg = n$ alors $P^{(n)} = n! \text{co} P$.
- $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$, on a : $(P + \lambda Q)^{(k)} = P^{(k)} + \lambda Q^{(k)}$, en conséquence l'application :

$$\begin{aligned} K_n[X] &\longrightarrow K_{n-k}[X] \text{ est linéaire.} \\ P(X) &\longmapsto P^{(k)}(X) \end{aligned}$$
- $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k P^{(k)} Q^{(n-k)} \text{ Formule de Leibniz}$$

Définition 20

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, on dit qu'une racine $a \in \mathbb{K}$ de P est de multiplicité $n \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si $P(a) = \dots = P^{(n-1)}(a) = 0$ mais $P^{(n)}(a) \neq 0$. Et convient de dire que a est multiplicité nulle dans P lorsqu'elle n'est pas une racine de P .

Théorème 15

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a \in \mathbb{K}$ on a : $P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$.

Théorème 16

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{K}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a est une racine de P de multiplicité n
- $(X - a)^n$ divise P , $(X - a)^{n+1}$ ne divise pas P .
- $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = (X - a)^n Q(X)$ avec $Q(a) \neq 0$.

2.5 Polynômes scindés.

Définition 21 On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est scindé dans \mathbb{K} si et seulement si toutes ses racines sont dans \mathbb{K} .

Remarque 4

- Tout polynôme non constant est scindé dans \mathbb{C} .
- Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé dans \mathbb{R} si et seulement si toutes ses racines sont réelles.

Théorème 17

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé dans \mathbb{K} , alors

$$P(X) = \text{co}(P) \prod_{k=1}^n (X - z_k)^{\alpha_k}$$

où z_k sont les racines de P et α_k leurs multiplicités respectives.

En particulier $\deg P = \sum_{k=1}^n \alpha_k$.

Formules de Viète-Newton entre racines et coefficients d'un polynôme scindé :

Soit $P(X) = a_n X^n + \dots + a_0$ un polynôme scindé de degré n , et z_1, \dots, z_n ses racines distincts ou non, on a les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n z_k &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ \sum_{i < j} z_i z_j &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \sum_{i_1 < \dots < i_k} z_{i_1} \dots z_{i_k} &= (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n} \\ \prod_{k=1}^n z_k &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{aligned}$$

3 Applications linéaires.

3.1 Généralités.

Définition 22

Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $u : E \rightarrow F$, on dira que u est linéaire si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ on a : } u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y)$$

Vocabulaire et notations :

- L'ensemble des applications linéaires de E vers F se note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$.
- Une application linéaire est dite endomorphisme lorsque l'ensemble d'arrivée est inclu dans celui de départ. L'ensemble des endomorphismes de E se note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.
- Elle sera dite isomorphisme lorsqu'elle est bijective. L'ensemble des isomorphismes de E vers F se note $\mathcal{I}som_{\mathbb{K}}(E)$.
- Elle sera dite automorphisme lorsqu'elle est bijective et lorsque l'ensemble d'arrivée est inclu dans celui de départ. L'ensemble des automorphismes de E se note $\mathcal{G}l_{\mathbb{K}}(E)$.

Proposition 9

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, On a les propriétés suivantes :

- Si $\mathcal{B} = ((x_k)_{1 \leq k \leq n})$ famille de vecteurs de E , et $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^n$ alors :

$$u \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k u(x_k) \text{ en particulier } u(\text{Vect}(\mathcal{B})) = \text{Vect}(u(\mathcal{B})).$$

- Deux applications linéaires égales sur une famille génératrice sont égales sur l'espace vectoriel tout entier.
- Une application linéaire est nulle si et seulement si elle est nulle sur la base.
- Une application linéaire est entièrement déterminée par ses valeurs sur la base.
- Si \mathcal{B} famille génératrice de E , alors $u(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de $\text{Im } u$.
 En particulier si u est surjective si et seulement si $u(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de F .
- Si \mathcal{B} est libre dans E et u injective, alors $u(\mathcal{B})$ est libre dans F .
- Si \mathcal{B} est une base de E , alors u est un isomorphisme si et seulement si $u(\mathcal{B})$ est une base de F .

Proposition 10

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, On a les propriétés suivantes :

- $u(0_E) = 0_F$.
- L'image directe et réciproque d'un sous-espace vectoriel est aussi un sous-espace vectoriel .
- $\ker u = \{x \in E \text{ tel que } u(x) = 0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de E , on l'appelle noyau de u .
- u est injective si et seulement si $\ker u = \{0_E\}$.
- $\text{Im } u = u(E)$ est un sous-espace vectoriel de F , on l'appelle image de u .
- u est surjective si et seulement si $\text{Im } u = F$.

Proposition 11

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, On a les propriétés suivantes :

- $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F), +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -ev ,en particulier la somme de deux applications linéaires est aussi linéaire.
- La composée de deux applications linéaires est aussi linéaire, en particulier $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E), +, \cdot, \circ)$ est une algèbre sur \mathbb{K} .
- La réciproque d'un isomorphisme est aussi un isomorphisme, en particulier $(\mathcal{G}l_{\mathbb{K}}(E), \circ)$ est un groupe, on l'appelle le *groupe linéaire de E* .

3.2 Applications linéaires en dimension finie.

Théorème 18

- Tout \mathbb{K} -ev de dimension n est isomorphe à \mathbb{K}^n .
- Deux \mathbb{K} -ev de dimension finie sont isomorphe si et seulement si ils sont de même dimension.

Théorème 19

Soient E et F deux \mathbb{K} -ev de dimensions finies, alors $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ est de dimension finie avec

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)) = \dim_{\mathbb{K}}(E) \cdot \dim_{\mathbb{K}}(F)$$

3.3 Rang d'une application linéaire

Définition 23

Le rang d'une application linéaire, u , noté $\text{rg}(u)$ est défini par la relation suivante :

$$\text{rg}(u) = \dim \text{Im } u.$$

Théorème 20 Formule du rang

Soit $u : E \rightarrow F$ linéaire avec E un \mathbb{K} -ev de dimension finie, on a le résultat suivant :

$$\dim E = \dim \ker u + \dim \text{Im } u$$

Corollaire 5

Soit $u : E \rightarrow F$ linéaire, on a les propriétés suivantes :

- u est injective si et seulement si $\text{rg}(u) = \dim E$.
- u est surjective $\text{rg}(u) = \dim F$.
- u est bijective $\text{rg}(u) = \dim E = \dim F$.

Corollaire 6

Le rang est invariant par composition à gauche ou à droite par un isomorphisme. Autrement dit si u est linéaire et v isomorphisme alors : $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(u)$ et $\text{rg}(u \circ v) = \text{rg}(u)$.

Corollaire 7

Soit $u : E \rightarrow F$ linéaire où E et F deux \mathbb{K} -ev de dimensions finies et égales, on a les équivalences suivantes : u isomorphisme $\iff u$ injective
 $\iff u$ surjective

Corollaire 8

Un endomorphisme sur un espace vectoriel de dimension finie est bijectif si et seulement si il est injectif.

4 Somme d'espaces vectoriels.

4.1 Généralités.

Définition 24

Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espace vectoriel de E .

– On appelle somme de F et G le sous-espace vectoriel de E noté $F + G$ défini par la relation suivante

$$x \in F + G \iff \exists x_1 \in F, \exists x_2 \in G \text{ tel que } x = x_1 + x_2.$$

– Si de plus $F \cap G = \{0_E\}$, on dit que la somme est directe et on la note par $F \oplus G$.

– Si de plus $E = F \oplus G$, on dit que les sous-espace vectoriel F et G sont supplémentaires dans E , et dans ce cas

$$\forall x \in E, \exists! x_1 \in F \text{ et } \exists! x_2 \in G \text{ tel que } x = x_1 + x_2.$$

Remarque 5

Soit F et G deux sous-espace vectoriel d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E et $\mathcal{B}_1 \subset F, \mathcal{B}_2 \subset G$, alors :

– $\text{Vect}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) = \text{Vect}(\mathcal{B}_1) + \text{Vect}(\mathcal{B}_2)$.

– Si de plus $F \cap G = \{0_E\}$, alors $\text{Vect}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) = \text{Vect}(\mathcal{B}_1) \oplus \text{Vect}(\mathcal{B}_2)$.

Théorème 21

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espace vectoriel de E tels que $F \cap G = \{0_E\}$, alors :

$$\dim_{\mathbb{K}}(F \oplus G) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G)$$

Corollaire 9

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espace vectoriel de E supplémentaires alors : $\dim_{\mathbb{K}}(G) = \dim_{\mathbb{K}}(E) - \dim_{\mathbb{K}}(F)$.

Corollaire 10

Soit F et G deux sous-espace vectoriel d'un \mathbb{K} -ev, E , de dimension finie alors :

$$\dim_{\mathbb{K}}(F + G) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G) - \dim_{\mathbb{K}}(F \cap G)$$

4.2 Projection et projecteur.

Définition 25

Si $E = F \oplus G$, on rappelle que $\forall x \in E, \exists x_1 \in F$ et $\exists x_2 \in G$ tel que $x = x_1 + x_2$.

– x_1 s'appelle la projection de x sur F parallèlement à G et se note $p_{F//G}(x)$.

– x_2 s'appelle la projection de x sur G parallèlement à F et se note $p_{G//F}(x)$.

Proposition 12

Avec les notations précédentes l'application : $p = p_{F//G} : E \longrightarrow F$ est

$$x \longmapsto x_1 = p_{F//G}(x)$$

linéaire vérifiant les propriétés suivantes :

1) $p^2 = p$.

2) $\text{Im } p = F, \text{ ker } p = G$ en particulier

$$E = \text{Im } p \oplus \text{ker } p.$$

Définition 26

On appelle projecteur sur E , tout endomorphisme, p de E tel que

$$p^2 = p.$$

Proposition 13

Soit p un projecteur de E , on a les propriétés suivantes :

- 1) $E = \text{Im } p \oplus \ker p$.
- 2) $x \in \text{Im } p \iff p(x) = x$.
- 3) p est la projection sur son image parallèlement à son noyau.

Conclusion. Toute projection est un projecteur, et tout projecteur est une projection sur son image parallèlement à son noyau.

4.3 Symétries.

Définition 27

On appelle symétrie sur E , tout endomorphisme, s de E tel que : $s^2 = id_E$.

Proposition 14

Soit s une symétrie de E , on a les propriétés suivantes :

- 1) $p = \frac{1}{2}(s + id_E)$ est un projecteur.
- 2) En posant $F = \text{Im } p$ et $G = \ker p$, on a $E = F \oplus G$ avec $s(x) = \begin{cases} x & \forall x \in F \\ -x & \forall x \in G \end{cases}$.
 On dit alors que s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G .
- 3) Inversement tout projecteur p permet de définir la symétrie $s = 2p - id_E$ sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\ker p$.

5 Matrices.

5.1 Généralités.

5.1.1 Trace d'une matrice carré.

Définition 28

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle trace de A , le nombre notée $\text{tr}(A)$, défini par la relation suivante :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

Proposition 15

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et P inversible, on a les propriétés suivantes :

- $\text{tr}(A + \lambda B) = \text{tr}(A) + \lambda \text{tr}(B)$.
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
- $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$.

5.1.2 Transposée d'une matrice.

Définition 29

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle transposé de A , la matrice notée tA , défini par la relation suivante :

$${}^tA = (a_{j,i})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Proposition 16

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K}$ et P inversible, on a les propriétés suivantes :

- ${}^t(A + \lambda B) = {}^tA + \lambda {}^tB$.
- ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$.
- tP est inversible, avec $({}^tP)^{-1} = {}^t(P^{-1})$.

5.2 Matrices en tant qu'applications linéaires.

Remarque 6

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors l'application

$$\begin{aligned} M : \mathbb{K}^p &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ X &\longmapsto MX \end{aligned}$$

est linéaire. Ainsi toute matrice peut être étudiée comme application linéaire, avec :

- 1) $X \in \ker M \iff X \in \mathbb{K}^p$ et $MX = 0$.
- 2) $Y \in \text{Im } M \iff Y \in \mathbb{K}^n$ et $\exists X \in \mathbb{K}^p$ tel que $Y = MX$.
En particulier $\text{rg}(M) = \dim \text{Im } M = \text{rg}(\text{colonnes de } M)$.
- 3) $\text{rg}(M) + \dim \ker M = p = \text{nombre de colonnes de } M$.

Proposition 17

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors : M est inversible $\iff \ker M = \{0\}$
 $\iff \text{rg}(M) = n$

Théorème 22

Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles sont de même rang.

5.3 Matrice d'une application linéaire.

Définition 30

Soient E et F deux \mathbb{K} -espace vectoriel tels que $\dim E = n$ et $\dim F = p$. Soient $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de F et $u : E \rightarrow F$ une application linéaire. On appelle la matrice de u relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' , la matrice notée

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$$

dont la j -ème colonne est formée par les coordonnées de $u(e'_j)$ dans la base \mathcal{B}' .

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u) = \begin{matrix} & u(e_1) & \dots & u(e_n) \\ e'_1 & & & \\ \vdots & & & \\ e'_p & & & \end{matrix}$$

Dans le cas où $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ on note tout simplement $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$.

Proposition 18

Soient E, F des espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}_1 = (e_i), \mathcal{B}_2 = (e'_j)$ et $E \xrightarrow{u} F$ une application linéaire. On a les propriétés suivantes :

– Si $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u) = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$ alors

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^p a_{i,j} e'_i$$

– Soit $x \in E$, et X la matrice colonne formée par les coordonnées de x dans \mathcal{B}_1 et Y celle formée par les coordonnées de $y = u(x)$ dans \mathcal{B}_2 alors l'équation linéaire $y = u(x)$ s'écrit sous la forme matricielle

$$Y = MX.$$

Proposition 19

Avec les notations de la proposition suivante, on a les propriétés suivantes

– Si $u, v : E \rightarrow F$ est linéaire et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u + \lambda v) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u) + \lambda \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(v).$$

– $\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u) = 0$ si et seulement si $u = 0$.

En particulier deux applications linéaires sont égales si et seulement si leurs matrices associées dans les mêmes bases sont égales.

– Ainsi on définit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) &\longrightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ u &\longmapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u) \end{aligned}$$

– Si E, F, G des espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ et $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$ applications linéaires alors :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3}(v \circ u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3}(v) \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u)$$

– Si E, F des espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ et $E \xrightarrow{u} F$ application linéaire alors : $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u)$ est inversible si et seulement si u est un isomorphisme et dans ce cas

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u)^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(u^{-1})$$

5.4 Matrice de passage entre deux bases.

5.5 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Définition 31

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , \mathcal{B} une base de E et \mathcal{C} une famille de p vecteurs de E , la matrice de la famille \mathcal{C} dans la base \mathcal{B} est la matrice à n lignes et p colonnes notée $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ dont les colonnes sont formées par les coordonnées des éléments de \mathcal{C} dans \mathcal{B} .

Proposition 20

Avec les notations de la définition précédente on a :

$$\text{rg}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})) = \text{rg}(\mathcal{C})$$

En particulier \mathcal{C} est une base de E si et seulement si $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ est inversible.

5.6 Matrice de passage entre deux bases

Définition 32

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de E de dimension n . La matrice de passage de \mathcal{B}_1 vers \mathcal{B}_2 est la matrice carrée d'ordre n notée $\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2}$ définie par :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2)$$

Proposition 21

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de E de dimension n . Soit $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2}$, on a les résultats suivants :

- $P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(id_E)$
- Soit $x \in E$, $X_1 = [x]_{\mathcal{B}_1}$ la matrice colonne formée par les coordonnées de x dans \mathcal{B}_1 et $X_2 = [x]_{\mathcal{B}_2}$ celle formée par ses coordonnées dans \mathcal{B}_2 alors :

$$X_1 = PX_2$$

Théorème 23

Soit E et F deux \mathbb{K} -espace vectoriel. $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de E et $\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2$ deux bases de F . Soit $u : E \rightarrow F$ linéaire. Posons $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2}(u)$, $N = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1}(u)$ et $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}'_1}$, $Q = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2}$ on a les résultats suivants :

- $M = P.N.Q$
- Si u est un endomorphisme de E et $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(u)$, $N = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(u)$, $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2}$ alors

$$M = P^{-1}.N.P$$

Corollaire 11

- Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles représentent la même application linéaire dans des bases différentes.
- Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

6 Déterminants.

6.1 Formes n -linéaires.

6.1.1 Formes bilinéaires.

Définition 33

On appelle forme bilinéaire sur E , toute application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ linéaire par rapport à l'une des variables fixant l'autre, autrement dit :

$$\begin{aligned} \varphi(x_1 + \lambda x_2, y) &= \varphi(x_1, y) + \lambda \varphi(x_2, y) \\ \varphi(x, y_1 + \lambda y_2) &= \varphi(x, y_1) + \lambda \varphi(x, y_2) \end{aligned}$$

Proposition 22

Soit φ une forme bilinéaire sur E , $(x, y) \in E^2$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, on a les résultats suivants :

- $\varphi(\lambda x, \mu y) = \lambda \mu \varphi(x, y)$.
- $\varphi(x, y) = 0$ si $x = 0_E$ ou $y = 0_E$.

Définition 34

Soit φ une forme bilinéaire sur E , on dit que :

- φ est symétrique si et seulement si $\varphi(x, y) = \varphi(y, x) \quad \forall (x, y) \in E^2$.
- φ est antisymétrique ou bien alternée si et seulement si $\varphi(x, y) = -\varphi(y, x) \quad \forall (x, y) \in E^2$.

Proposition 23

Soit φ une forme bilinéaire alternée sur E , $(x, y) \in E^2$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ on a les résultats suivants :

- $\varphi(x, x) = 0$.
- $\varphi(x, y + \lambda x) = \varphi(x, y)$.
- $\varphi(x, y) = 0$ si $\{x, y\}$ est liée.

Théorème 24

Toutes les formes bilinéaires alternées sur un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 2 sont proportionnelles.

6.1.2 Formes n -linéaires.

Définition 35

On appelle forme n -linéaire sur E , toute application

$$\varphi: \underbrace{E \times \dots \times E}_{n \text{ fois}} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \varphi((x_1, \dots, x_n))$$

linéaire par rapport à chacune de ses variables en fixant les autres, autrement dit :

- Linéarité par rapport à la première variable : $\varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, y_2, \dots, y_n\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(x_i, y_2, \dots, y_n)$.

- Linéarité par rapport à la deuxième variable : $\varphi\left(y_1, \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, y_3, \dots, y_n\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(y_1 x_i, y_3, \dots, y_n)$.

- Linéarité par rapport à la dernière variable : $\varphi\left(y_1, \dots, y_{n-1}, \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(y_1, \dots, y_{n-1}, x_i)$.

Proposition 24

Soit φ une forme n -linéaire sur E , $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on a les résultats suivants :

- $\varphi(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \varphi(x_1, \dots, x_n)$.
- $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$ si l'un des x_i est nul.

Proposition 25

Soit φ une forme n -linéaire sur E , on dit que :

- φ est symétrique si et seulement si : $\varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varphi(x_1, \dots, x_n) \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$.
- φ est antisymétrique si et seulement si $\varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \varphi(x_1, \dots, x_n) \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$.
- $\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -\varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \forall 1 \leq i \neq j \leq n$.

Proposition 26

Soit φ une forme bilinéaire, alors φ est alternée si et seulement si elle est anti-symétrique.

Proposition 27

Soit φ une forme bilinéaire alternée sur E , $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ on a les résultats suivants :

- $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$ si $\exists i \neq j$ tel que $x_i = x_j$.
- $\varphi\left(x_1, \dots, x_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j, \dots, x_n\right) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$.
- $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$ si $\{x_1, \dots, x_n\}$ est liée.

Théorème 25

Toutes les formes n -linéaires alternées sur un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n sont proportionnelles.

6.2 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base donnée.

6.2.1 Généralités.

Définition 36

Soit \mathcal{B} une base de E tel que $\dim E = n$. On appelle déterminant dans la base \mathcal{B} , l'unique forme n -linéaire alternée définie sur E^n notée $\det_{\mathcal{B}}$ vérifiant la relation suivante : $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$

Proposition 28

Soit \mathcal{B} une base de E , et \mathcal{B}' famille d'éléments de E tel que $\text{card} \mathcal{B}' = \dim E$, on a les résultats suivants :

- \mathcal{B}' est liée si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 0$.
- \mathcal{B}' est libre si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$.
- \mathcal{B}' est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$, et dans ce cas on a :

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \frac{1}{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')}$$

6.2.2 Orientation d'un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie.

Principe : Orienter E revient à se fixer une base \mathcal{B}_0 , toute autre base \mathcal{B} est dite directe si et seulement si $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) > 0$, dans le cas contraire c'est à dire si $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) < 0$ elle est dite indirecte.

En général les bases canoniques sont directes et orientent l'espace vectoriel .

Équation d'une droite du plan.

Si D est la droite du plan passant par le point A est dirigée par le vecteur \vec{u} , alors son équation s'obtient à l'aide de la relation suivante :

$$M \in D \iff \det_{\mathcal{B}}(A\vec{M}, \vec{u}) = 0 \text{ où } \mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}) \text{ la base canonique de } \mathbb{R}^2.$$

6.3 Déterminant d'un endomorphisme.

Définition 37

Soit $u : E \rightarrow E$ un endomorphisme, alors $\det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))$ ne dépend pas du choix de la base \mathcal{B} de E , on pose alors $\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))$ et on l'appelle le déterminant de u .

Proposition 29

Soit $u, v : E \rightarrow E$ deux endomorphismes de E tel que $\dim E = n$, \mathcal{B} une base de E et $\mathcal{B}' = (x_1, \dots, x_n)$ famille d'éléments de E , on a les résultats suivants :

- $\det(id_E) = 1$.
- $\det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}')) = \det(u) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.
- $\det(u \circ v) = \det(u) \det(v)$.
- u est un automorphisme de E si et seulement si $\det(u) \neq 0$, avec $\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det(u)}$

6.4 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n .

Définition 38

Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n , $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, noté $\det(A)$ est par définition le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de \mathbb{K}^n .

Notation.

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, son déterminant se note aussi $|a_{i,j}|$.

Proposition 30

- Si E est un \mathbb{K} -ev de dimension finie, de base \mathcal{B} et u un endomorphisme de E , alors : $\det u = \det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u))$.
- $\det(I_n) = 1$.

Proposition 31

- Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors $\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$.
- Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ alors $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}) \quad \forall 1 \leq j \leq n$ où $A_{i,j}$ est la matrice obtenue en enlevant la i -ème ligne et j -ème colonne, $\det(A_{i,j})$ s'appelle cofacteur d'indice (i, j) , la matrice formée par ses cofacteurs s'appelle comatrice de A et se note $Com(A)$. On dit qu'on a développé le déterminant suivant la j -ème colonne.
- Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ alors $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}) \quad \forall 1 \leq i \leq n$. On dit qu'on a développé le déterminant suivant la i -ème ligne.

Proposition 32

- Si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases de E , alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \det(P)$ où P est la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' .
- $A = (a_{i,j})$ est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et dans ce cas :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \text{ avec } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t Com(A)$$

- $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
- Si P est inversible alors $\det(PAP^{-1}) = \det(A)$.

*Fin
à la prochaine*