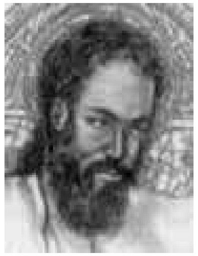
XM6-CPGE My Youssef

Résumé de cours
Séries entières

Rabat le 12 février 2010

Blague du jour :

• Qu'est-ce qui est jaune et vert, qui court dans l'herbe ?
– L'équipe de football du Brésil !
• Pourquoi les joueurs d'une équipe de foot ont ils les mains toutes lisses ?
– Car cela fait deux ans qu'ils se les frottent en disant "le prochain match, on le gagne !"



Mathématicien du jour **Al Kashi**

Al-Kachi (1380-1429) est mathématicien et astronome perse (iranien ouz-bek). Al-Kachi calcula le nombre π avec une précision de seize décimales, la plus grande précision pendant près de deux siècles. Al-Kachi joua un rôle important dans la conception de l'observatoire de Samarcande et dans la publication des tables sultaniennes.

Remerciements : à Mr My Hassan Ratbi (Rabat) pour la source latex de ce résumé de cours.

1 Séries entières complexes

1.1 Convergence

Définition :

• On appelle série entière de variable complexe z, toute série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$ où $a_n \in \mathbb{C}$.

• On appelle domaine de convergence $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C},\ \sum a_n z^n \text{ converge }\}$. Pour tout $z \in \mathcal{D}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ s'appelle la somme de la série $\sum a_n z^n$ au point z.

Lemme d'Abel

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $r > 0$ tel que $(a_n r^n)$ soit bornée, alors $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$, on a $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Théorème et définition

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de domaine de convergence $\mathcal{D}$, alors il existe un unique réel positif, R, vérifiant $\mathcal{D}(O, R) \subset \mathcal{D} \subset \overline{\mathcal{D}}(0, R)$.
R s'appelle le rayon de convergence, en particulier pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :
• $\sum a_n z^n$ converge absolument si $|z| < R$.
• $\sum a_n z^n$ diverge si $|z| > R$.
• on ne peut rien dire si si $|z| < R$.

Remarque :
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R, $\mathcal{D}(0, R)$ s'appelle le disque de convergence de la série, à l'intérieur duquel la convergence de la série est normale sur tout compact. On a en plus les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} R &= \sup\{|z| \text{ tel que } \textstyle\sum a_n z^n \text{ converge }\} \\ &= \sup\{|z| \text{ tel que } \textstyle\sum a_n z^n \text{ converge absolument }\} \\ &= \sup\{|z| \text{ tel que } (a_n z^n) \text{ bornée }\} \\ &= \sup\{|z| \text{ tel que } (a_n z^n) \text{ converge vers } 0\} \end{aligned}$$

1.2 Opérations sur les rayons de convergence

Soient $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_0 b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectivement R_a et R_b.

Règles de D'Alembert et de Cauchy

- D'Alembert : Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $R_a = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$
- Cauchy : Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $R_a = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$

Propriétés :

1) Si $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leqslant |b_n|$, alors $R_a \geqslant R_b$.
2) Si $a_n = O(b_n)$ ou $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.
3) Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.
4) Le rayon de convergence R de la somme des deux séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ vérifie :
   - Si $R_a \neq R_b, R = \min(R_a, R_b)$,
   - Si $R_a = R_b, R \geqslant R_a = R_b$.

   De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a :
   $$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$
5) Le rayon de convergence R de la série $\sum c_n z^n$, produit de Cauchy des deux séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ vérifie : $R \geqslant \min(R_a, R_b)$ et on a :
   $$\forall z \in \mathbb{C},\ \text{tel que } |z| < \min(R_a, R_b), \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$
6) Une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence.

2 Séries entières réelles

2.1 Comportement de la somme

Soit $\sum a_n x^n$ une série à coefficients a_n tous réels et à variable x réelle. Soit R son rayon de convergence R, l'intervalle $]-R, R[$ s'appelle l'intervalle de convergence dans lequel la série converge absolument, plus encore elle converge normalement sur tout compact de $]-R, R[$. Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, on a les résultats suivants :

Théorème

- f est continue sur $]-R, R[$.
- f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$, avec $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx$.

2.2 Fonctions développables en série entière

Définition

Soit f une fonction d'une partie X de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On dit que f est développables en série entière (DSE) en $x_0 \in X$, s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon $R > 0$ et $r \in]0, R]$ avec $]-r, r[\subset X$ tel que :

$$\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Théorème

Si f est développable en série entière en x_0, alors il existe un voisinage de x_0 sur le quel f est de classe C^∞ et le développement en série entière de f en x_0 est $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$. Cette série est appelée série de Taylor de f en x_0.

Remarque : La réciproque du théorème précèdent est en général fausse, toutefois on a le résultat suivant :

Théorème

Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de x_0, et si le reste intégral $R_n(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$ converge uniformément vers 0 alors f est développable en série entière en x_0 avec $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ au voisinage de x_0

Propriétés :

1) La somme de deux fonctions DSE est DSE et son DSE est la somme des deux développements.
2) La produit de deux fonctions DSE est DSE et son DSE est la produit de Cauchy des deux développements.
3) Si f est DSE alors f' est DSE.

3 Fonctions holomorphes

Définition :
Soit U ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, on dit que f est dérivable en un point $z_0 \in U$ si et seulement si $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe dans $\mathbb{C}$, on pose alors $f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$, appelée dérivée de f au point z_0.
On dit que f est holomorphe sur U si elle est dérivable en tout point de U.
Remarque :
• La somme, produit, composée, rapport (quand ils sont définis) de fonctions holomorphes est une fonction holomorphe.
• Les opérations sur les dérivées des fonctions à variable réelle sont encore valables pour celles à variable complexe.

Théorème

Soit U ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, et f dérivable en un point $z_0 \in U$ alors

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \quad \text{Conditions de Cauchy-Riemann}$$

Définition

• Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est développables en série entière (DSE) en $z_0 \in U$, s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon $R > 0$ et $r \in]0, R]$ avec $\mathcal{D}(0, r) \subset X$ tel que : $\forall x \in \mathcal{D}(0, r),\ f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$
• On dit que f est analytique sur U si et seulement si elle DSE en tout point de U.
• on dit que f est une fonction entière si elle DSE sur U.

Théorème

Soit U ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, alors f est holomorphe sur U si et seulement si f est analytique sur U

Théorème

Soit U ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe sur U, alors $\{z \in U \text{ tel que } f(z) = 0\}$ est au plus dénombrable et si $z_0 \in U$ tel que $f(z_0) = 0$, alors $\exists! n \in \mathbb{N}$ et $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe telle que $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$.

Fin

À la prochaine