XM6-CPGE My Youssef

Résumé de cours

Séries de Fourrier

Rabat le 2 mars 2010

Blague du jour :

Dans une voiture, quatre ingénieurs. Tout coup la voiture s'arrête..
- Le Mécanicien : Je le savais, c'est un problème de transmission.
- Le chimiste : c'est la faute des acides de la batterie !
- L'électronicien : c'est le circuit électronique qui ne marche plus !.
- L'Informaticien en dernier : ... et si on essayait de fermer toutes les fenêtres ouvertes, de quitter, et redémarrer à nouveau ?

Mathématicien du jour **Hilbert**
David Hilbert (1862-1943) est un mathématicien allemand. Il est considéré comme un des plus grands mathématiciens du XX ème siècle, au même titre que Henri Poincaré. Il a développé la théorie des invariants, l'axiomatisation de la géométrie, les fondements de l'analyse fonctionnelle, la mécanique quantique et la relativité générale. Il a adopté et défendu avec vigueur les idées de Georg Cantor. Il est aussi connu comme l'un des fondateurs de la théorie de la démonstration, de la logique mathématique et a clairement distingué les mathématiques des métamathématiques.

Remerciements : à Mr Karim Chaira (Mohammedia) pour la source latex de ce résumé de cours.
Dans tous le document $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces de Hilbert.

1.1 Généralités.

Définition

On appelle espace de Hilbert tout espace préhilbertien complet.

Remarque : Tout espace préhilbertien de dimension finie (i.e : hermitien ou euclidien) est un espace de Hilbert.
Rappel : Si H est espace préhilbertien et F sous-espace vectoriel de H de dimension finie dont $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est un base orthonormée , $\forall x \in H$, on a les propriétés suivantes :
- : $x - \sum_{i=1}^{n} (x|e_i) \in F^{\perp}$;
- $H = F \oplus^{\perp} F^{\perp}$;
- $p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)$ est la projection orthogonale de x sur F ;
- $d(x, F) = d(x, p_F(x)) = \|x - p_F(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |(x|e_i)|^2}$;
- $P_F(x)$ est la meilleur approximation dans F du vecteur x de E ;
- L'application $x \mapsto P_F(x)$ est un endomorphisme de E, continue, et de norme 1 si $F \neq \{0\}$;
- $\|P_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x|e_i)|^2 =\leqslant \|x\|^2$ (Inégalité de Bessel)

1.2 Bases hilbertienne.

Définition

Soient $(E, (.|.))$ un espace préhilbertien et I un ensemble dénombrable. On dit qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$, d'éléments de E est une base hilbertienne de E si elle vérifie les conditions suivantes :
(i) $(e_i)_{i\in I}$ est une famille orthonormale de E,
(ii) l'ensemble des combinaisons linéaires (finies) des vecteurs de $\{e_i\ ;\ i \in I\}$ forment un sous- espace dense dans E.
On dit aussi que $(e_i)_{i\in I}$ est une famille orthonormale totale de E.

Exemples :
- L'espace $\ell^2(\mathbb{N}) = \{u = (u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}\ ;$ la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^2$ est convergente $\}$,

muni du produit scalaire : $(u|v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n} v_n$, pour tout $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ et $v = (v_n)_{n\geqslant 0}$ de $\ell^2(\mathbb{N})$, est un espace de Hilbert. Soit e_n la suite dans dont tous les termes sont nuls sauf le $(n+1)^{\text{ième}}$ qui est égal à 1.
$\{e_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ est une famille orthonormale totale de $\ell^2(\mathbb{N})$.

– On considère l'espace préhilbertien $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodiques, continues sur $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire $(.|.) : (f,g) \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t)dt$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{inx}$. La famille $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
– On considère l'espace préhilbertien $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodiques, continues sur $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire $(.|.) : (f,g) \mapsto \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t)dt$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout . La famille $(\cos(nx))_{n\in\mathbb{N}} \cup (\sin(nx))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1.3 Coefficients de Fourier

Définition.

Soient $(E, (.|.))$ un espace préhilbertien et $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de E. Pour tout $x \in E$, la suite $((x|e_i))_{i\in I}$ est appelée famille des coefficients de Fourier de x relativement à la base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$ de E.

Remarque :

– On rappelle que l'espace $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodiques, continues sur $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire $(.|.) : (f,g) \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t)dt$ est préhilbertien et que la famille $(e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Dans ce cas les coefficients de Fourier pour une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodique, continue sur $\mathbb{R}$ sont données par la formule :
$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$
– On rappelle que l'espace $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodiques, continues sur $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire $(.|.) : (f,g) \mapsto \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t)dt$ est préhilbertien et que la famille $(\cos nx)_{n\in\mathbb{N}} \cup (\sin nx)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Dans ce cas les coefficients de Fourier pour une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ sont données par les formules :
$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt dt \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt dt \end{cases}$$

Théorème.

Soient $(E, (.|.))$ un espace de Hilbert et $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de E, où $I = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. Alors, pour tout $x \in E$,
(i) la série $\sum_{n\in I} (e_n|x).e_n$ est convergente dans E, pour la norme $\|.\|_2$, avec :
$$x = \sum_{n\in I} (e_n|x).e_n,$$
(ii) la série $\sum_{n\in I} |(x|e_n)|^2$ est convergente, et on a :
$$\|x\|^2 = \sum_{n\in I} |(e_n|x)|^2 \quad \text{Égalité de Parseval}$$

1.4 Séries trigonométriques.

Définition.

On appelle polynôme trigonométrique toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ telle qu'il existe des constantes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ de $\mathbb{K}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)).$$

Remarque : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une application, alors f est un polynôme trigonométrique si et seulement s'ils existent des constantes $\gamma_{-n}, \ldots, \gamma_0, \ldots, \gamma_n$ de $\mathbb{K}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ikx}$$

Définition.

On appelle série trigonométrique associée à une famille $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{C}$, la série de fonctions $\sum_{p\geq 0} u_p$, où pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\begin{cases} u_0(x)=c_0, \\ u_p(x)=c_pe^{ipx}+c_{-p}e^{-ipx},\ p\in\mathbb{N}^*\end{cases}$

Remarque. Pour tout $(p,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}$, $c_pe^{ipx}+c_{-p}e^{-ipx}=a_p\cos(px)+b_p\sin(px)$,

$$\text{où } \begin{cases} a_p=c_p+c_{-p} \\ b_p=i\,(c_p-c_{-p}) \\ c_p=a_p-ib_p \\ c_{-p}=a_p+ib_p \end{cases}$$

Théorème.

Soit $\sum_{p\geq 0} u_p$ une série trigonométrique de terme général $u_p : x\mapsto c_pe^{ipx}+c_{-p}e^{-ipx}=a_p\cos(px)+b_p\sin(px)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) La série $\sum_{p\geq 0} u_p$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

(ii) Les séries numériques $\sum_{p\geq 0} c_p$ et $\sum_{p\geq 1} c_{-p}$ sont absolument convergentes.

(iii) Les séries numériques $\sum_{p\geq 0} a_p$ et $\sum_{p\geq 0} b_p$ sont absolument convergentes.

2 Séries de Fourier

2.1 Coefficients de Fourier.

Définition.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une application 2π-périodique et réglée sur $\mathbb{R}$.

(i) On appelle coefficients de Fourier exponentielle de f les nombres complexes :

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt.$$

(ii) On appelle coefficients de Fourier trigonométriques de f les nombres complexes :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\ dt$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\ b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\ dt$$

Propriétés. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une application 2π-périodique et réglée sur $\mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

- $\begin{cases} c_0(f)=\dfrac{a_0(f)}{2} \\ \forall n\in\mathbb{N}^* : c_n(f)=\dfrac{a_n(f)-i\,b_n(f)}{2} \\ \forall n\in\mathbb{N}^* : c_{-n}(f)=\dfrac{a_n(f)+i\,b_n(f)}{2}\end{cases}$
- Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n(f)\in\mathbb{R}$ et $b_n(f)\in\mathbb{R}$.
- Si f est paire, alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n(f)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\ dt$ et $b_n(f)=0$.
- Si f est impaire, alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n(f)=0$ et $b_n(f)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\ dt$.
- $c_n(\overline{f})=\overline{c_{-n}(f)}$, $a_n(\overline{f})=\overline{a_n(f)}$ et $b_n(\overline{f})=\overline{b_n(f)}$.
- On pose $\widehat{f}(t)=f(-t)$, on a : $c_n(\widehat{f})=c_{-n}(f)$, $a_n(\widehat{f})=a_n(f)$ et $b_n(\widehat{f})=-b_n(f)$.
- On pose $f_a(t)=f(t+a)$, on a : $c_n(f_a)=e^{ina}c_n(f)$, $a_n(f_a)=\cos(na)a_n(f)+\sin(na)b_n(f)$ et $b_n(f_a)=\cos(na)b_n(f)-\sin(na)a_n(f)$.
- Les applications $f\mapsto c_n(f)$, $f\mapsto a_n(f)$ et $f\mapsto b_n(f)$ sont $\mathbb{C}$-linéaires.
- Si de plus f est normalisée, alors on a :
  - $\lim_{n\to+\infty} a_n(f)=\lim_{n\to+\infty} b_n(f)=\lim_{n\to+\infty} c_n(f)=0$.
  - $|c_n(f)|\leq \|f\|_1=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,dt$.

Définition.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une application. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b)$ de $[a, b]$ telle que la restriction de f à chacun des intervalle $]a_{i-1}, a_i[$, est prolongeable en une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a_{i-1}, a_i]$, $1 \leqslant i \leq n$.

Propriétés.

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une application 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Soit $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π-périodique, alors : $c_n(f') = i\, n.c_n(f)$.
- Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur $\mathbb{R}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ si l'application $f^{(k-1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas :
$$c_n(f^{(k)}) = (i\, n)^k c_n(f).$$

2.2 Sommes de Fourier.

Définition.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π-périodique et réglée sur $\mathbb{R}$. On appelle sommes partielles de Fourier associées à f d'ordre n, $n \in \mathbb{N}$, l'application $S_n(f)$ définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx}.$$

Remarque. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π-périodique et réglée sur $\mathbb{R}$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$; $S_n(f)(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ et $S_0(f)(x) = \dfrac{a_0}{2}$.

Définitions. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π-périodique et réglée sur $\mathbb{R}$. On appelle série de Fourier de f en un point x de $\mathbb{R}$, la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_n(f) e^{inx}\right)_{n\in\mathbb{N}}$; notée $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$ ou $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$.

On dit que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$ est une série à double entrée.

On dit que cette série est convergente au point x de $\mathbb{R}$ si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=-n}^{n} c_n(f) e^{inx}\right)$ existe dans $\mathbb{C}$; dans ce cas, on la note : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=-n}^{n} c_n(f) e^{inx}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx}$.

Notation.

- $(\mathcal{L}(\mathbb{T}), <.,.>)$ désigne l'espace préhilbertien des fonctions réglées normalisées 2π-périodiques.
- On note, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, l'application définie par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $e_n(t) = e^{int}$.
- F_n le sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{T})$ engendré par $(e_k)_{|k|\leqslant n}$, c'est à dire $F_n = \mathrm{vect}(\{e_k ; |k| \leqslant n\})$.

On a les propriétés suivantes :

- $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est base hilbertienne de l'espace préhibertien complexe $\mathcal{L}(\mathbb{T})$. Avec, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = < e_n, f >$.
- Pour tout $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$, on a $S_n(f)$ est la projection orthogonale de f sur F_n.

Inégalité de Bessel.

Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 \leqslant \|f\|_2^2$

.

2.3 Convergence quadratique.

Théorème.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|f - S_n(f)\|_2 = 0$

On dit que $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f en moyenne quadratique.

Formule de Parseval.

Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$, alors $\|f\|_2^2 = \displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \right)$

Injection de la transformée de Fourier.

Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$, alors $(c_n(f))_{n\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, avec $f = 0 \Longleftrightarrow c_n(f) = 0, \ \forall n \in \mathbb{Z}$

2.4 Convergence ponctuelle.

Notation : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une application 2π-périodique et contionue par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ h<0}} f(x+h)$ et $\lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} f(x+h)$ existent bien dans $\mathbb{C}$, on les notera respectivement $f(x^-)$ et $f(x^+)$.

Théorème de Dirichlet

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors, en tout point x de $\mathbb{R}$, la série de Fourier de f, $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} = \dfrac{a_0(f)}{2} + \sum\limits_{n\geqslant 1} (a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))$ converge vers $\dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.

En particulier, si f est continue en x, alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx} \\ &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)) \end{aligned}$$

2.5 Convergence normale.

Théorème.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π-périodique continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors,

(i) les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} |c_n(f)|$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} |c_{-n}(f)|$ sont convergentes.

(ii) La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} = \dfrac{a_0(f)}{2} + \sum\limits_{k\geqslant 1} (a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx))$, convergent normalement (donc uniformément) sur $\mathbb{R}$ vers f.

En particulier,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx} \\ &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)) \end{aligned}$$

Fin

À la prochaine