CPGE My Youssef, Rabat

Résumé de cours: *Séries dans un Banach*

25 janvier 2010

Blague du jour :
• Qu'est ce que crie un escargot sur le dos d'une tortue ?
Réponse : Yaaaaaaaaaaahoooooooooooooooooooooooouuuuuuuuuuuuuu ! ! ! !
• Que dit un hérisson qui se cogne un cactus ?
Réponse : maman !
• Quel est l'animal le plus heureux ?
Réponse : Le hiboux. Parce que sa femme s'appelle chouette.

Personnalité du jour — *Banach*

Stefan Banach (1892 - 1945) est un mathématicien polonais. Pendant la guerre, il est réformé, travaille à la construction de routes et suit à l'Université les leçons de mathématiques. Avec Steinhaus, il fonda plusieurs revues mathématiques en Pologne. Il est un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle. Ses autres travaux touchent à la théorie de la mesure de l'intégration, de la théorie des ensembles et des séries orthogonales, il a notamment donné son nom aux espaces dits de Banach.

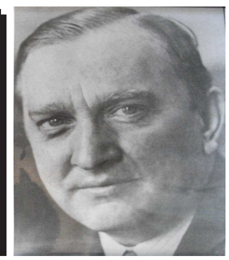

Table des matières

1 Séries numériques.

1.1 Convergence.

Définition 1 .
On appelle séries numérique ($\sum x_n$) de terme général x_n, réel ou complexe, la suite de terme général $S_n = x_0 + ... + x_n$, appelée somme partielle.
La séries converge si la suite des sommes partielles converge.
La limite S s'appelle somme de la séries et se note $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.
La quantité $R_n = S - S_n$ s'appelle reste de rang n.

Remarque 1
- *CN de la convergence : Si une séries numérique converge, alors son terme général tend vers 0, la réciproque n'est pas toujours vraie. Contre exemple : $\sum \frac{1}{n}$.*
- *CNS de la convergence : la série $(\sum_n x_n)$ converge si et seulement si la suite (S_n) est de Cauchy.*

Remarque 2 .
- *L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel.*
  En particulier si deux séries $(\sum_n x_n)$ et $(\sum_n y_n)$ sont convergente, $(\sum_n (x_n + y_n))$ est aussi convergente avec
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n + \sum_{n=0}^{+\infty} y_n$$
- *Une séries complexe de terme général $z_n = x_n + iy_n$ converge si et seulement si les Séries réelles de terme général x_n et y_n convergent.*
- *La suite géométrique $(\sum a^n)$ converge si et seulement si $|a| < 1$, avec $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.*

1.2 Convergence absolue.

Définition 2 .
On dit que la série $(\sum x_n)$ converge absolument quand la série $(\sum |x_n|)$ converge.

Théorème 1 ***Inégalité triangulaire***
Toute série $(\sum x_n)$ qui converge absolument est convergente avec
$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$$

Remarque 3 .
La réciproque de ce théorème est en général fausse. La séries alterne $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge sans converger absolument, on dit qu'elle est semi-convergente.

Théorème 2 .
Soit $(\sum_n x_n)$ *et* $(\sum_n y_n)$ *deux séries absolument convergentes, alors la séries de terme général* z_n *défini par la relation*

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k} \quad \textit{Produit de convolution de Cauchy}$$

(on écrit en général $(z_n) = (x_n) * (y_n)$*) est absolument convergente, avec*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} y_n\right)$$

1.3 Séries termes positifs : règles de convergence..

Dans tout ce paragraphe (sauf mention du contraire), les séries considérées x_n *et* y_n *sont termes positifs.*

Régle 1 .
La séries $\left(\sum_n x_n\right)$ *termes positifs est convergente si et seulement si la suite de ses sommes partielles* $(S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k)$ *est majore.*

Régle 2 . *règles de comparaison.*
Si $0 \leq x_n \leq y_n$ *PCR ou si* $x_n = 0(y_n)$ *ou bien si* $x_n = o(y_n)$, *alors :*

1) $\left(\sum_n y_n\right)$ *converge* $\Longrightarrow \left(\sum_n x_n\right)$ *converge.*

2) $\left(\sum_n x_n\right)$ *diverge* $\Longrightarrow \left(\sum_n y_n\right)$ *diverge.*

Régle 3 . *règles de comparaison logarithmique.*
On pose $w_n = \dfrac{x_n}{y_n}$. *Si* (w_n) *est croissante, en particulier si* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{w_{n+1}}{w_n} < 1$, *alors :*

1) $\left(\sum_n y_n\right)$ *converge* $\Longrightarrow \left(\sum_n x_n\right)$ *converge.*

2) $\left(\sum_n x_n\right)$ *diverge* $\Longrightarrow \left(\sum_n y_n\right)$ *diverge.*

Régle 4 . *règle d'équivalence.*
Si $x_n \underset{+\infty}{\sim} y_n$, *alors*

1) $\left(\sum_n y_n\right)$ *converge* $\Longrightarrow \left(\sum_n x_n\right)$ *converge, dans ce cas* $\sum_{k=n}^{+\infty} x_n \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} y_n$.

2) $\left(\sum_n y_n\right)$ *diverge* $\Longrightarrow \left(\sum_n x_n\right)$ *converge, dans ce cas* $\sum_{k=0}^{n} x_n \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} y_n$.

Régle 5 . *règle de comparaison avec une intégrale.*
Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *décroissante vers 0 l'infini, alors :*
$\left(\sum_{(} f_{(}\right) n)$ *converge* $\Longleftrightarrow f$ *est intégrable sur* $[0, +\infty[$.

Remarque 4 .

1) *séries de Riemann :* $\left(\sum_n \frac{1}{n^\alpha}\right)$ *converge si et seulement si* $\alpha\, 1$.
2) *séries de Bertrand :* $\left(\sum_n \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}\right)$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$ *ou* $\alpha = 1, \beta > 1$.

Régle 6 . *règle de D'Alembert.*
On cherche $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, *et on distingue les cas suivants :*

1) *Si* $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, *alors* $\left(\sum_n x_n\right)$ *converge.*
2) *Si* $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$, *alors* $\left(\sum_n x_n\right)$ *diverge.*
3) *Si* $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, *on ne peut rien dire.*

Régle 7 . *règle de Cauchy.*
On cherche $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n}$, *et on distingue les cas suivants :*

1) *Si* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} < 1$, *alors* $\left(\sum_n x_n\right)$ *converge.*
2) *Si* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} > 1$, *alors* $\left(\sum_n x_n\right)$ *diverge.*
3) *Si* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$, *on ne peut rien dire.*

Régle 8 . *règle condensation de Cauchy.*
Si (x_n) *est suite décroissante, alors :*
$\left(\sum_n x_n\right)$ *diverge* $\Longleftrightarrow$ $\left(\sum_n 2^n x_{2^n}\right)$ *converge.*

Remarque 5 .

1) *Toutes les règles précédentes sont applicable pour les séries termes positifs, toute fois on peut les appliquer dans le cas général, mais pour étudier la convergence absolue.*
2) *La règle suivante est applicable dans le cas général (même complexe), et permet de ramener l'étude d'une séries semi-convergente celle d'une séries absolument convergente.*

Régle 9 . *Transformation d'Abel.*
Soit $(x_n), (y_n)$ *deux suites complexes, alors :*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k(y_k - y_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n-1}(x_k - x_{k+1})y_k + x_n y_n - x_1 y_0$$

Remarque 6 .

1) *La transformation d'Abel est aussi connue sous le nom de sommation par parties, vu sa ressemblance avec le principe d'intégration par parties.*
2) *Si (ε_n) est une suite réelle strictement décroissante vers 0 et (z_n) une suite complexe, dont la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$ est borne, alors la séries $\left(\sum_n \varepsilon_n z_n\right)$ est convergente.*

1.4 Séries alternées

Définition 3 .
On appelle série alternée toute série réelle dont le terme général change de signe donc de la forme $(-1)^n x_n$ où x_n garde un signe constant.

Théorème 3 ***Critère spécial de Leibniz pour les Séries alternes***
Soit $\sum(-1)^n x_n$ une série alternée telle que $|x_n|$ décroit vers 0, alors la séries $\sum(-1)^n x_n$ converge. avec :
– *R_n est du même signe que son premier terme $(-1)^{n+1}x_{n+1}$.*
– *$|R_n| \leq |x_{n+1}|$.*
– *La somme $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x_n$ est comprise entre les sommes partielles S_{2n} et S_{2n+1}.*

2 Séries dans un espace vectoriel normé

2.1 Convergence.

Définition 4 *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et (x_n) une suite d'éléments de E. On dit que la série $\sum x_n$ converge si la suite des sommes partielles $(S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k)$ converge dans E, sa limite s'appelle somme de la série et se note $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$, ainsi on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k$$

Théorème 4 *Si $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach, alors $\sum x_n$ converge si et seulement si S_n est de Cauchy.*

Remarque 7 *Si $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé et si $\sum x_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.*

Définition 5 *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et (x_n) une suite d'éléments de E. On dit que la série $\sum x_n$ converge absolument si la série $\sum \|x_n\|$.*

Théorème 5 *Si $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach et si $\sum x_n$ converge absolument, alors elle converge, avec*

$$\|\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|$$

Théorème 6 *Soit $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach.*

1) *Si $\sum x_n$ et $\sum x_n$ convergent, alors $\sum (x_n + y_n)$ converge, avec*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n + \sum_{n=0}^{+\infty} y_n$$

2) *Si $\sum x_n$ et $\sum x_n$ convergent absolument, alors $\sum (x_n + y_n)$ converge absolument, avec*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n + y_n\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\| + \sum_{n=0}^{+\infty} \|y_n\|$$

3 Familles sommables

3.1 Ensembles dénombrables

Définition 6 *Un ensemble $\mathcal{I}$ est dit dénombrable, s'il existe une injection $\sigma : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{N}$.*

Remarque 8
- *Un ensemble est dénombrable s'il est équipotent (en bijection) avec une partie de $\mathbb{N}$;*
- *Tout ensemble fini est dénombrable ;*
- *Toute partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable ;*
- *La réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrables ;*
- *Le produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.*
- *$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables, mais $\overline{\mathbb{Q}}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas dénombrables.*

Proposition 1
- *Tout ensemble dénombrable $\mathcal{I}$ peut être muni d'une relation d'ordre totale.*
- *Tout ensemble dénombrable $\mathcal{I}$ admet une suite de partie $\mathcal{I}_n \subset \mathcal{I}$ (dite exhaustive) , vérifiant la propriété suivante $\begin{cases} I_n \subset I_{n+1} \\ I = \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n \end{cases}$.*

Théorème 7 *Si $\mathcal{I}$ est un ensemble dénombrable et $(\mathcal{I}_n)$ un suite exhaustive de $\mathcal{I}$, alors pour toute partie finie $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$, il existe une partie $\mathcal{I}_k$ tel que $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}_k$.*

3.2 Familles dénombrables à termes positifs

Dans toute cette partie, on considère $\mathcal{I}$ un ensemble dénombrable et $(x_k)_{k\in\mathcal{I}}$ une famille dénombrable de réels positifs.

Définition 7 *On dit que $(x_k)_{k\in\mathcal{I}}$ est sommable si et seulement si $\exists M > 0$ tel que $\sum_{k\in\mathcal{J}} x_k \leq M$ pour toute partie finie $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$. On appelle alors somme de la famille $(x_k)_{k\in\mathcal{I}}$, le réel noté $\sum_{k\in\mathcal{I}} x_k$ défini par*

$$\sum_{k\in\mathcal{I}} x_k = \sup_{\mathcal{J}\subset\mathcal{I}, fini} \sum_{k\in\mathcal{J}} x_k$$

Théorème 8

– *Si il existe une suite exhaustive* $(\mathcal{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathcal{I}$ *telle que la suite* $\left(\sum_{k\in\mathcal{I}_n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée, alors la famille* $(x_k)_{k\in\mathcal{I}}$ *est sommable, avec* $\sum_{k\in\mathcal{I}} x_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k\in\mathcal{I}_n} x_k$

– *Si la famille* $(x_k)_{k\in\mathcal{I}}$ *est sommable, alors pour suite exhaustive* $(\mathcal{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathcal{I}$ *la suite* $\left(\sum_{k\in\mathcal{I}_n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée, avec* $\sum_{k\in\mathcal{I}} x_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k\in\mathcal{I}_n} x_k$.

Proposition 2 *Si les familles* $(x_k)_{k\in\mathcal{I}}$ *et* $(y_k)_{k\in\mathcal{I}}$ *sont sommables, alors la famille* $(x_k+y_k)_{k\in\mathcal{I}}$ *est sommable, avec* $\sum_{k\in\mathcal{I}}(x_k+y_k) = \sum_{k\in\mathcal{I}} x_k + \sum_{k\in\mathcal{I}} y_k$

3.3 Familles dénombrables à valeurs dans un espace vectoriel normé

Dans toute cette partie, on considère $\mathcal{I}$ un ensemble dénombrable et $(x_k)_{k\in\mathcal{I}}$ une famille dénombrable à valeurs dans un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$.

Définition 8 *On dit que la famille* $(x_k)_{k\in\mathcal{I}}$ *est absolument sommable quand la famille* $(\|x_k\|)_{k\in\mathcal{I}}$ *est sommable*

Théorème 9 *Si* $(E, \|.\|)$ *est un Banach et si* $(x_k)_{k\in\mathcal{I}}$ *est absolument sommable, alors pour suite exhaustive* $(\mathcal{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathcal{I}$, *on a la suite* $\left(\sum_{k\in\mathcal{I}_n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente, dont limite ne dépend pas du choix de la suite exhaustive, on appelle somme de la famille* $(x_k)_{k\in\mathcal{I}}$, *l'élément de* E, *noté* $\sum_{k\in\mathcal{I}} x_k$ *défini par* $\sum_{k\in\mathcal{I}} x_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k\in\mathcal{I}_n} x_k$.

Corollaire 1 *Une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à valeurs dans un espace vectoriel normé* $(E, \|.\|)$ *est absolument sommable si et seulement si la série* $\sum x_n$ *converge absolument. Dans le cas où* E *est un Banach, les sommes relatives aux deux notions sont identiques, i.e :* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.

Corollaire 2

– *Si* $(E, \|.\|)$ *est un Banach et si* $(x_k)_{k\in\mathcal{I}}$ *et* $(y_k)_{k\in\mathcal{I}}$ *sont absolument sommables, alors pour tout scalaire* λ, *on a :* $(x_k+\lambda y_k)_{k\in\mathcal{I}}$ *est absolument sommable, avec* $\sum_{k\in\mathcal{I}}(x_k+\lambda y_k) = \sum_{k\in\mathcal{I}} x_k + \lambda \sum_{k\in\mathcal{I}} y_k$.

– *Une famille dénombrable de réels* $(x_k)_{k\in\mathcal{I}}$ *est absolument sommable si et seulement si les familles* $(x_k^+)_{k\in\mathcal{I}}$ *et* $(x_k^-)_{k\in\mathcal{I}}$ *sont absolument sommables, dans ce cas* $\sum_{k\in\mathcal{I}} x_k = \sum_{k\in\mathcal{I}} x_k^+ - \sum_{k\in\mathcal{I}} x_k^-$.

– *Une famille dénombrable de complexes* $(z_k)_{k\in\mathcal{I}}$ *est absolument sommable si et seulement si les familles* $(\mathrm{Re} z_k)_{k\in\mathcal{I}}$ *et* $(\mathrm{Im} z_k)_{k\in\mathcal{I}}$ *sont absolument sommables, dans ce cas :* $\sum_{k\in\mathcal{I}} z_k = \sum_{k\in\mathcal{I}} \mathrm{Re} z_k + \mathrm{i} \sum_{k\in\mathcal{I}} \mathrm{Im} z_k$.

3.4 Autres modes de sommation.

Définition 9 *Une série d'un espace vectoriel normé* $\sum x_n$ *est dite commutativement convergente si et seulement si la série de terme général* $(x_{\sigma(n)})$ *converge pour toute bijection,* $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

Théorème 10 *Toute série absolument convergente à termes dans un espace de Banach est commutativement convergente.*

Définition 10 *Une famille $(x_k)_{k\in\mathcal{I}}$ d'un espace vectoriel normé est dite sommable par paquets si et seulement si pour toute partition dénombrable $(\mathcal{I}_n)_{n\in\mathcal{J}}$ de $\mathcal{I}$, les familles suivantes sont dénombrables : $(x_k)_{k\in\mathcal{I}_n}$ et $(y_n)_{n\in\mathcal{J}}$ où $y_n = \sum_{k\in\mathcal{I}_n} x_k$.*

Théorème 11 *Toute famille $(x_k)_{k\in\mathcal{I}}$ sommable à termes dans un espace de Banach est sommable par paquets, dans ce cas pour toute partition dénombrable $(\mathcal{I}_n)_{n\in\mathcal{J}}$ de $\mathcal{I}$, on a :*

$$\sum_{k\in\mathcal{I}} x_k = \sum_{n\in\mathcal{J}} \left(\sum_{k\in\mathcal{I}_n} x_k \right)$$

Théorème 12 *Si $(x_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}}$ est une suite double absolument sommable à termes dans un espace de Banach, alors les sommes suivantes existent et sont égales :*

$$\begin{aligned}\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} x_{p,q} &= \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} x_{p,q}\right) \\ &= \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} x_{p,q}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} x_{p,q}\right)\end{aligned}$$

4 Sommation dans un algèbre normée.

Dans toute cette partie $(A, \|.\|)$ est une algèbre normée de Banach.

Théorème 13 *Si $a \in A$ tel que $\|a\| < 1$, alors $\sum a^k$ converge absolument, $1_A - a$ est inversible avec $(1_A - a)^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$*

Corollaire 3 *Soit E est un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}_c(E)$, alors $\mathrm{Sp}(u) \subset B(0, |||u|||)$.*

Corollaire 4 *On note par $\mathcal{U}$ l'ensemble des éléments inversibles de A, alors $\mathcal{U}$ est un ouvert et l'application $a \mapsto a^{-1}$ est un homéomorphisme de $\mathcal{U}$ vers lui même.*

Théorème 14 *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors la série de terme général $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$ converge absolument, avec $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n)\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} u_p v_q\right)$*

Corollaire 5 *Pour tout $a \in A$, la série $\sum \frac{a^n}{n!}$ converge absolument, sa somme s'appelle exponentielle de a et se note e^a, on en particulier $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a.\mathrm{e}^b$*

Fin
À la prochaine