CPGE My Youssef, Rabat

Résumé de cours: *Suites et séries de fonctions*

2 février 2010

Remerciements à Mr My Hassan Ratbi (Rabat) pour la source Latex de ce résumé de cours.

Blague du jour :
Un prof de math explique à ces élèves de faire attention avant de répondre lors d'un oral de concours, et s'assurer que ce qu'ils allaient dire est juste :
- Les intelligents sont toujours dans le doute. Seuls les imbéciles sont constamment affirmatifs.
- Vous en êtes certain ? demande un élève.
- Absolument certain !

Mathématicien du jour **Borel**
Félix Edouard Justin Émile Borel (1871-1956), mathématicien français, spécialiste de la théorie des fonctions et des probabilités, membre de l'Académie des sciences, a été aussi un homme politique, député, ministre, résistant et prisonnier de guerre, il fût décoré par le Grand-croix de la Légion d'honneur, par la Croix de guerre et par la Médaille de la Résistance.
Il fût premier de sa promotion premier à l'École polytechnique, à l'École Normale, et à l'agrégation de mathématiques. Il était parmi les pionniers de la théorie de la mesure et de son application à la théorie des probabilités et de jeux.

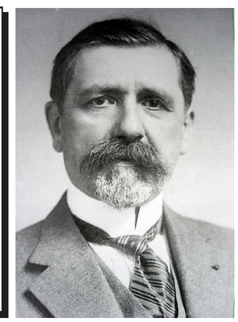

Table des matières

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont définies sur une partie A d'un espace vectoriel E de dimension finie et à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie F.

1 Modes de convergence

1.1 Suites de fonctions

1.1.1 Convergence simple

Étant donnée une suite (f_n) de fonctions définies sur une partie A de E à valeurs dans un evn de dimension finie F.

Convergence simple

Définition 1 *La suite (f_n) converge simplement sur A vers f, si pour tout élément x de A, la suite $(f_n(x)$ converge vers $f(x)$.*
On dit alors que f est limite simple sur A de la suite de fonctions (f_n).

Remarque 1

1) *Il est clair que f est unique puisque pour tout $x \in A$, la suite $(f_n(x))$ a une limite unique.*
2) *On dit que (f_n) converge simplement sur A si elle existe f telle que (f_n) converge simplement sur f.*
3) *Si $X \subset A$ on dit que la suite converge simplement sur X si la suite des restrictions de (f_n) sur X converge simplement.*

1.1.2 Convergence uniforme

Définition 2 *La suite (f_n) converge uniformément sur A vers f, si pour tout élément x de A, la suite $\|f_n - f\|_\infty$ converge vers 0.*
On dit alors que f est limite uniforme sur A de la suite de fonctions (f_n).

Remarque 2

1) *En notant $R_n = \sup \|f_n(x) - f(x)\| \in \overline{\mathbb{R}}$, la convergence uniforme de la suite (f_n) vers f est équivalente la convergence de la suite (R_n) vers 0. Donc pour montrer qu'une suite (f_n) converge uniformément vers f il suffit qu'il existe une suite de réels (ε_n) qui tend vers 0 telle que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in A, \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon_n$*
2) *Pour montrer qu'une suite de fonction (f_n) ne converge pas uniformément il suffit d'exhiber une suite (x_n) d'éléments de A tel que $f_n(x_n) - f(x_n)$ ne tend pas vers 0.*
En effet $R_n = \sup\limits_{x \in A} \|f_n(x) - f(x)\| \geqslant f_n(x_n) - f(x_n)$.
3) *On dit que (f_n) converge uniformément sur A si elle existe f telle que (f_n) converge uniformément sur f. La limite f est souvent calculer par la convergence simple.*
4) *Si $X \subset A$ on dit que la suite converge uniformément sur X si la suite des restrictions de (f_n) sur X converge uniformément.*
5) *Si (f_n) converge uniformément sur A alors converge uniformément sur toute partie $X \subset A$.*
6) *L'écriture formelle de la convergence simple et uniforme de la suite (f_n) vers f est respectivement :*
   – *CS* : $\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$.
   – *CU* : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$

Proposition 1 *Si la suite (f_n) converge uniformément vers f alors (f_n) converge simplement vers f.*

1.1.3 Critère de Cauchy uniforme.

Définition 3 *Soient (f_n) une suite de fonctions définie de A vers un espace vectoriel normé F, on dit que la suite (f_n) est uniformément de Cauchy sur A si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, (n \geqslant N, m \geqslant N) \Rightarrow \forall x \in A, \|f_n(x) - f_m(x)\| \leqslant \varepsilon.$$

Théorème 1 *Si F est un Banach, (f_n) converge uniformément vers f si et seulement si f vérifie le critère de Cauchy uniforme.*

Remarque 3 *$\mathcal{B}(A,F)$, l'espace de fonctions bornées sur A, muni de la norme $\|.\|_\infty$ est complet.*

1.2 Séries de fonctions.

Soit (f_n) une suite de fonctions de A dans F, comme pour les séries dans un espace vectoriel normé , on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ la somme partielle.

1.2.1 Convergence simple

Définition 4 *On dit que $\sum f_n$ converge simplement sur A si $\forall x \in A, \sum f_n(x)$ converge. Dans ce cas :*

- *la fonction somme est note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, et on a $\forall x \in A, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$*
- *le reste et la suite de fonction définie par : $\forall x \in A, R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.*
- *On a $\forall x \in A, S(x) = S_n(x) + R_n(x)$.*

L'ensemble des éléments tel que $\sum f_n(x)$ converge s'appelle domaine de convergence simple.

Convergence uniforme

On dit que $\sum f_n$ converge uniformément sur A si (S_n) converge uniformément sur A.
On la convergence uniforme implique la convergence simple.

Proposition 2 *Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur A, alors la suite (f_n) converge vers 0 sur A.*

Remarque 4 *(f_n) peut converger vers 0 sans que $\sum f_n$ converge uniformément.*

Proposition 3 *Une séries convergeant simplement vers f converge uniformément si et seulement si R_n converge uniformément vers 0*

Définition 5 *On dit que la suite $\sum f_n$ converge uniformément sur tout compact de A si quelle que soit la partie K compact de A la suite $\sum f_n$ converge uniformément sur K.*

1.2.2 Convergence absolue

Définition 6 *On dit que la suite $\sum f_n$ converge absolument sur A si quelle que soit x de A , la suite $\sum \|f_n(x)\|$ converge .*

Proposition 4 *Si la série $\sum f_n$ converge absolument sur A, alors $\sum f_n$ converge simplement sur A.*

1.2.3 Convergence normale

Définition 7 *On dit que la suite $\sum f_n$ converge normalement sur A si*
– $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{B}(A, F)$,
– *la série numérique* $\sum \|f_n\|_\infty$ *converge.*

Proposition 5 *Si la série $\sum f_n$ converge normalement sur A, alors $\sum f_n$ converge absolument et uniformément sur A, et l'on a :*

$$\|\sum_{k=0}^{+\infty} f_n\|_\infty = \sum_{k=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty$$

2 Théorèmes d'approximations

Dans ce paragraphe, les applications considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et valeurs dans un espace vectoriel F de dimension finie.

2.1 Fonctions en escalier

2.2 Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

Théorème 2 *Toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, valeurs dans F, est limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers sur $[a, b]$.*
Ce qui peut se traduire par :
– $\forall f \in \mathcal{CM}([a, b], F), \forall \varepsilon > 0, \exists g \in \mathcal{E}([a, b], F), \|f - g\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
– $\forall f \in \mathcal{CM}([a, b], F), \exists (f_n) \in (\mathcal{E}([a, b], F))^{\mathbb{N}}, \lim\limits_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

Théorème 3 *Toute fonction continue sur un segment $[a, b]$, valeurs dans F, est limite uniforme d'une suite de fonctions affines par morceaux sur $[a, b]$*

Théorème 4 ***Premier théorème de Stone-Weirstrass***
Toute fonction complexe continue sur un segment $[a, b]$, valeurs dans $\mathbb{C}$, est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômes de la forme $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Théorème 5 ***Deuxième Théorème de Weirstrass***
Toute fonction complexe 2π-périodique valeurs dans $\mathbb{C}$, est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions polynômes trigonométriques de la forme $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$

3 Continuité de la limite uniforme

Théorème 6 ***Théorème de la double limite ou interversion des limites.***
Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{F}(A, F)$ et $a \in \overline{A}$.
– *Si pour tout n, $\lim\limits_{x \to a} f_n(x)$ existe.*
– *Si la suite f_n converge uniformément vers f sur A,*
alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\lim\limits_{x \to a} f_n(x)\right)$ existent et sont égales, plus précisément :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x)\right) = \lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x)\right)$$

Théorème 7 ***Théorème de la continuité de la limite uniforme.***
Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{F}(A,F)$ et $a \in A$.
– Si pour tout n, f_n est continue en a
– Si la suite f_n converge uniformément vers f sur A,
alors f est continue en a.

Théorème 8 ***Théorème d'interversion des limites et sommes.***
Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{F}(A,F)$ et $a \in \overline{A}$.
– Si pour tout n, $\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$ existe.
– Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur A,
alors $\lim\limits_{x\to a}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$ converge et sont égales, plus précisément :

$$\lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right)$$

Théorème 9 ***Théorème de la continuité de la somme.***
Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{F}(A,F)$ et $a \in A$.
– Si pour tout n, f_n est continue en a
– Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur A,
alors $\sum n0+\infty$ est continue en a.

Remarque 5 *Les résultats précédents sont encore valables si l'on remplace convergence uniforme par convergence uniforme sur tout compact.*

4 Dérivée de la limite uniforme

I tant un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit un point, $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions de I dans F de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème 10 *Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{C}^1(I,F)$ telle que :*
– (f_n) converge simplement sur I vers $f \in \mathcal{F}(I,F)$.
– La suite (f_n') converge uniformément sur tout segment de I vers $g \in \mathcal{F}(I,F)$.
Alors
– f est de classe C^1 sur I avec $f' = g$.
– la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I.

Théorème 11 *Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{C}^k(I,F), k \in \mathbb{N}$ telle que :*
– pour tout $j \in [\![0,k-1]\!]$ la suite $(f_n^{(j)})_n$ converge simplement sur I ;
– La suite $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers $g \in \mathcal{F}(I,F)$.
Alors la fonction $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ est de classe $\mathbb{C}^k$ sur I avec $f^{(k)} = g$ et chaque suite $(f_n^{(j)})_n, j \in [\![0,k-1]\!]$ converge uniformément sur tout segment de I vers $f^{(j)}$.

Théorème 12 *Soit (f_n) une suite de fonctions de $C^\infty(I,F)$ telle que :*
– pour tout $j \in \mathbb{N}$ la suite $(f_n^{(j)})_n$ converge simplement sur I ;
– il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geqslant p$, La suite $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément sur tout segment de I.
Alors la fonction $f = \lim f_n$ est de classe C^∞ sur I et chaque suite $(f_n^{(j)})_n, j \in \mathbb{N}$ converge uniformément sur tout segment de I vers $f^{(j)}$.

Théorème 13 ***Dérivation terme à terme***
Soit $\sum f_n$ *une série de fonctions de* $C^1(I,F)$ *telle que :*
– *la série* $\sum f_n$ *converge simplement sur* I *;*
– *la série* $\sum f_n'$ *converge uniformément sur tout segment* J *de* I*.*
Alors la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I *avec :* $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$

Théorème 14 *Soit* $\sum f_n$ *une série de fonctions de* $\mathcal{C}^k(I,F), k\in\mathbb{N}$ *telle que :*
– *pour tout* $j\in[\![0,k-1]\!]$ *la série* $\sum f_n^{(j)}$ *converge simplement sur* I *;*
– *La série* $\sum f_n^{(k)}$ *converge uniformément sur tout segment de* I*.*
Alors la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur* I *et chaque série* $\sum f_n^{(j)}$ *où* $j\in[\![0,k-1]\!]$ *converge uniformément sur tout segment de* I *vers* $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)}$*. Plus précisément :*

$$\forall j\in[\![0,k]\!],\forall x\in I,\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)}(x)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x)\right).$$

Théorème 15 *Soit* $\sum u_n$ *une série de fonctions de* $\mathcal{C}^\infty(I,F), k\in\mathbb{N}$ *telle que :*
– *pour tout* $j\in\mathbb{N}$ *la série* $\sum f_n^{(j)}$ *converge simplement sur* I *;*
– *il existe* $p\in\mathbb{N}$ *tel que, pour tout* $k\geqslant p$*, La série* $\sum f_n^{(k)})_n$ *converge uniformément sur tout segment de* I*.*
Alors la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* I *et chaque série* $\sum f_n^{(j)}, j\in\mathbb{N}$ *converge uniformément sur tout segment de* I *avec*

$$\forall j\in[\![0,k]\!],\forall x\in I,\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)}(x)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x)\right).$$

Remarque 6 *Les résultats précédents sont encore valables si l'on remplace convergence uniforme par convergence uniforme sur tout compact.*

5 Intégrale de la limite uniforme

5.1 Fonction réglée

Définition 8 *On appelle fonction réglée sur un segment* $[a,b]$ *à valeurs dans un espace vectoriel normé ,* F *de dimension finie, toute application* $f:[a,b]\longrightarrow F$ *telle que*
– $\lim_{t\to x^+} f(t)$ *existe* $\forall x\in]a,b]$*.*
– $\lim_{t\to x^-} f(t)$ *existe* $\forall x\in[a,b[$*.*
L'ensemble de telles fonctions se note $\mathcal{R}([a,b],F)$*.*

Remarque 7
- *Toute fonction continue par morceaux est réglée, en particulier toute fonction continue ou en escalier sur* $[a,b]$ *est réglée.*
- *Toute fonction réglée est bornée*
- *La limite uniforme de fonctions réglées est réglée.*
- $\mathcal{R}([a,b],F)$ *est un fermé pour la norme* $\|.\|_\infty$.

Théorème 16
- *Pour toute fonction réglée* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $\varepsilon > 0$, $\exists \varphi, \psi$ *en escalier sur* $[a,b]$ *telles que* $\varphi \leq f \leq \psi \quad , \quad \psi - \varphi \leq \varepsilon$
- *Pour toute fonction réglée* $f : [a,b] \longrightarrow F$ *et* $\varepsilon > 0$, $\exists \varphi$ *en escalier sur* $[a,b]$ *telles que* $\|\varphi - f\|_\infty \leq \varepsilon$
- *Toute fonction réglée est limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers.*
- *La limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers est une fonction réglée.*

5.2 Intégration sur un segment

Théorème 17 *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow F$ *fonction réglée et* $\varphi_n : [a,b] \longrightarrow F$ *une suite de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers* f. *Alors la suite* $\left(\int_a^b \varphi_n(t)\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et sa limite ne dépend pas du choix de la suite* (φ_n). *On pose alors :* $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(t)\mathrm{d}t$

Remarque 8 *L'intégrale d'une fonction réglée hérite de toutes les propriétés de l'intégrale d'une fonction en escaliers, plus précisément si* $f, g : [a,b] \longrightarrow F$ *réglées et* $\lambda \in \mathbb{R}$, *on a les propriétés suivantes :*

- $\int_a^b (f+\lambda g)(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \lambda \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$
- $f \geq 0 \Longrightarrow \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geq 0.$
- $f \geq g \Longrightarrow \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$
- $\|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\mathrm{d}t.$
- $\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$
- $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t, \quad \forall c \in [a,b].$
- $\int_b^a f(t)\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$
- *l'application* $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ *est dérivable à gauche et à droite en tout point* $x \in [a,b]$, *avec* $F'(x^+) = f(x^+)$ *et* $F'(x^-) = f(x^-)$.

Théorème 18 *Si* f_n *est une suite de fonctions réglées qui converge uniformément vers* f, *alors* f *est réglée avec* $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$

Théorème 19 ***Intégration terme à terme.***
Si $\sum f_n$ *est une série de fonctions réglées qui converge uniformément, alors :*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$$

5.3 Intégration sur un intervalle quelconque.

Dans tout la suite I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Définition 9

- *Soit $f : I \longrightarrow F$, on dit que f est réglée sur I si et seulement si elle est réglée sur tout segment $[a,b] \subset I$.*
- *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$, on dit que f est intégrable sur I si et seulement si $\left\{ \int_{[a,b]} f \text{ tel que } [a,b] \subset I \right\}$ est majoré, on pose alors $\int_I f = \sup_{[a,b]\subset I} \int_{[a,b]} f$*
- *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, on dit que f est intégrable sur I si et seulement si f^+ et f^- est intégrable, on pose alors $\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$*
- *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, on dit que f est intégrable sur I si et seulement si $\mathrm{Re}f$ et $\mathrm{Im}f$ sont intégrables, on pose alors $\int_I f = \int_I \mathrm{Re}f + i \int_I \mathrm{Im}f$*
- *Soit $f : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \text{ ou } \mathbb{C}^n \\ t & \longmapsto & (f_1(t), \cdots, f_n(t)) \end{array}$, on dit que f est intégrable sur I si et seulement si f_i et sont intégrables, on pose alors $\int_I f = (\int_I f_1, \cdots, \int_I f_n)$*

Proposition 6 *Soit $f : I \longrightarrow F$ réglée, on a les résultats suivants :*

- *f intégrable sur I si et seulement si $\|f\|$ intégrable sur I, dans ce cas $\| \int_I f\| \leq \int_I \|f\|$.*
- *Si f est intégrable sur I et (J_n) une suite exhaustive de segments I, alors $\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} f$.*

Théorème 20 ***Théorème de convergence monotone***

Soit (f_n) une suite croissante $(f_n \leq f_{n+1})$ de fonctions réglées positives intégrables sur I qui converge simplement vers une fonction réglée f. Alors f est intégrable si et seulement si $\left(\int_I f_n\right)$ est majorée, dans ce cas, on a : $\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n$

Théorème 21 ***Théorème d'intégration terme à terme***

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions réglées intégrables sur I qui converge simplement. Alors f est intégrable si et seulement si $\sum \int_I \|f_n\|$ converge, dans ce cas, on a :

$$\|\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I \|f_n\| \quad , \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$$

Théorème 22 ***Théorème de convergence dominée***

Soit (f_n) une suite de fonctions réglées intégrables sur I qui converge simplement vers une fonction réglée f. Si $\exists \varphi$ réglée positive et intégrable sur I telle que $\|f_n\| \leq \varphi$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors f est intégrable avec : $\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n$

Fin
À la prochaine