CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ
المُؤ مِنُون

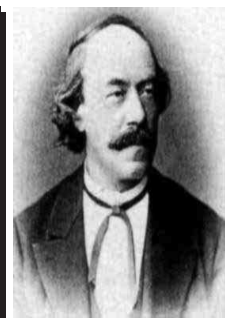
صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Résumé de cours: *Espaces vectoriels normés*

18 novembre 2009

Blague du jour
Bientôt vous serez ingenieur, peut être ingeénieur informaticien. Vérifier sur la liste ci-dessous si vous avez le profil, les types d'ingénieurs en informatique sont :
• L'ingénieur DISQUE DUR : il se rappelle tout, POUR TOUJOURS.
• L'ingénieur CD-ROM : il va toujours plus vite avec le temps.
• L'ingénieur RAM : il oublie tout de vous, dès le moment où vous lui tournez le dos.
• L'ingénieur WINDOWS : Tout le monde sait qu'il ne peut pas faire une chose correctement, mais personne ne peut s'en passer de ses services.
• L'ingénieur ECONOMISEUR D'ECRAN : Il est bon à rien, mais au moins, il est marrant !

Mathématicen du jour ***Lipschitz***
Rudolph Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903) était un mathématicien allemand.
Lipschitz a laissé son nom aux applications à dérivée bornée (Application lipschitzienne). En réalité, son travail s'étend sur des domaines aussi variés que la théorie des nombres, l'analyse, la géométrie differentielle et la mécanique classique, en particulier la résolution des équations du mouvement dans le formalisme d'Hamilton-Jacobi.



Dans tout le résumé $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .

1 Généralités.

1.1 Notion de normes.

Définition 1 . On appelle norme sur toute application

$$\begin{array}{cccc} N: & E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & N(x) \end{array}$$

vérifiant les propriétés suivantes :
– $N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0_E$, ***condition de séparabilité.***
– $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$, $\forall x \in E$.
– $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$. ***Inégalité triangulaire.***

<u>Vocabulaire et notations</u>.
– **Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dit un espace vectoriel norméquand il est muni d'une norme N.**
– **Pour tout $x \in E$, $N(x)$ s'appelle la norme de x et se note en général $\|x\|$.**
– **On dit alors que $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé.**
Dans toute la suite, sauf mention du contraire, on considère que $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé.
– **Pour tous $x, y \in E$, $d(x, y) = \|x - y\|$ s'appelle la distance entre x et y.**

- **Pour tout** $a \in E, r > 0$, $\mathrm{B}(a,r) = \{x \in E$ **tel que** $d(x,a) < r\}$ **s'appelle boule ouverte de centre** a **et de rayon** r**. En particulier** $x \in \mathrm{B}(a,r) \iff \|x-a\| < r$.
- **Pour tout** $a \in E, r \geq 0$, $\overline{\mathrm{B}}(a,r) = \{x \in E$ **tel que** $d(x,a) \leq r\}$ **s'appelle boule ouverte de centre** a **et de rayon** r**. En particulier** $x \in \overline{\mathrm{B}}(a,r) \iff \|x-a\| \leq r$.

Normes classiques.

1) Pour tout $x = (x_k) \in \mathbb{K}^n$**, on pose :**
- **Norme de la convergence absolue :** $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$.
- **Norme de la convergence quadratique :** $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$.
- **Norme de la convergence uniforme :** $\|x\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |x_k|$

2) Pour tout $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$**, on pose :**
- **Norme de la convergence absolue :** $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$.
- **Norme de la convergence quadratique :** $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\mathrm{d}t}$.
- **Norme de la convergence uniforme :** $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(t)|$

3) Norme produit : Si $(E_i, \|.\|_i)_{1\leq i\leq n}$ **sont des espace vectoriel normé, on peut définir sur le produit cartesien,** $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$**, la norme suivante, dite norme produit :**

$$\|(x_i)_{1\leq i\leq n}\| = \max_{1\leq i\leq n} \|x_i\|_i$$

Définition 2 .
- **Une partie** $A \subset E$ **est dite bornée dans** $(E, \|.\|)$ **si et seulement si**

$$\exists R \geq 0 \text{ tel que } \|x\| \leq R,\ \forall x \in A$$

Autrement dit, $A \subset \mathrm{B}(0_E, R)$.
- **Une** $f : X \longrightarrow (E, \|.\|)$ **est dite bornée si et seulement si** $f(X)$ **est bornée dans** $(E, \|.\|)$ **Autrement dit,** $\exists R \geq 0$ **tel que** $\|f(x)\| \leq R,\ \forall x \in X$

Définition 3 . Une application $f : (E, \|.\|_E) \longrightarrow (F, \|.\|)_F$ **est dite** k**-lipschitzienne si et seulement si**

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x-y\|_E,\ \forall x, y \in E$$

Autrement dit : $d(f(x), f(y)) \leq kd(x,y),\ \forall x, y \in E$
Dans ce cas $f(\mathrm{B}(x,R)) \subset \mathrm{B}(f(x), kR)$

Proposition 1 .
- **La somme de deux applications lipschitziennes est lipschitzienne.**
- **Le produit d'une application lipschitzienne avec une autre bornée est lipschitzienne.**

1.2 Quelques notions de topologie.

Définition 4 . Soit $a \in E$ **et** $U \subset E$.
- **On dira que** U **est un voisinage de** a **si** $\exists r > 0$ **tel que** $\mathrm{B}(a,r) \subset U$.
- **On dira que** U **est un ouvert de** E **s'il est voisinage de tous ses points, i.e.**

$$\forall a \in U,\ \exists r > 0 \text{ tel que } \mathrm{B}(a,r) \subset U$$

- **On dira que** U **est un fermé de** E **si son complémentaire** U^c **est un ouvert de** E**, i.e,**

$$\forall a \notin U,\ \exists r > 0 \text{ tel que } \mathrm{B}(a,r) \cap U = \emptyset$$

Proposition 2 .
- $\emptyset$ et E sont à la fois ouverts et fermés dans E.
- La ruénion quelconque (même infinie) d'ouverts est un ouvert.
- L'intersection finie d'ouverts est un ouvert.
- La ruénion finie de fermés est un fermé.
- L'intersection quelconque (même infinie) de fermés est un fermé.

Définition 5 . Soit $U \subset E$ et $a \in U$.
- On dira que a est un point intérieur de U quand U est un voisinage de a, on écrit alors $a \in \mathring{U}$.
- $a \in \mathring{U} \iff \exists r > 0$ tel que $\mathrm{B}(a, r) \subset U$.
- $\mathring{U}$ s'appelle l'intérieur de U.

Proposition 3 . Soit U une partie de E, on a les propriétés suivantes :
- $\mathring{U}$ est un ouvert de U.
- $\mathring{U}$ est le plus grand ouvert inclu dans U.
- U est un ouvert si et seulement si $\mathring{U} = U$.
- $\mathring{\mathring{U}} = U$.
- Si V est une autre partie de E telle que $U \subset V$, alors $\mathring{U} \subset \mathring{V}$

Définition 6 . Soit $U \subset E$ et $a \in E$.
- On dira que a est un point adhérant à U si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ on a } \mathrm{B}(a, \varepsilon) \cap U \neq \emptyset$$

  On écrit alors $a \in \overline{U}$.
- $\overline{U}$ s'appelle la frontière de U.

Proposition 4 . Soit U une partie de E, on a les propriétés suivantes :
- $\overline{U}$ est un fermé de E.
- $\overline{U}$ est le plus petit fermé de E contenant U.
- U est un fermé si et seulement si $\overline{U} = U$.
- $\overline{\overline{U}} = U$.
- Si V est une autre partie de E telle que $U \subset V$, alors $\overline{U} \subset \overline{V}$
- $\left(\overline{U}\right)^c = \widehat{U^c}$.

Proposition 5 . L'Adhérence d'une boule ouverte est exactement sa boule fermée associée.

$$\overline{\mathrm{B}(a, r)} = \overline{\mathrm{B}}(a, r), \ \forall a \in U, \ \forall r > 0$$

Définition 7 . Soit U une partie de E. On appelle frontière de U, l'ensemble noté ∂U ou $Fr(U)$ définie par la relation :

$$Fr(U) = \overline{U} \setminus \mathring{U}$$

Plus précisement $a \in Fr(U) \iff \forall \varepsilon > 0$, **on a** $\mathrm{B}(a, \varepsilon) \cap U \neq \emptyset$ **et** $\mathrm{B}(a, \varepsilon) \cap U^c \neq \emptyset$

Proposition 6 . Soit U une partie de E, on a les propriétés suivantes :
- $Fr(U) = \overline{X} \setminus \overline{U^c}$. En particulier $Fr(U)$ est fermée.
- $Fr(U) = Fr(U^c)$.
- $\overline{U} = U \cup Fr(U)$.
- Un ensemble est un fermé si et seulement s'il contient sa propre frontière.
- Un ensemble est un ouvert si et seulement s'il est disjoint de sa propre frontière.
- Un ensemble est à la fois ouvert et fermé si et seulement si sa frontière est vide.

Définition 8 . On dit qu'une partie U de E est dense dans E, lorsque son adhérence est ègal à E tout entier. i.e, $\overline{U} = E$.
En général, on dit qu'une partie U de E est dense dans une autre partie V de E, lorsque $V \subset \overline{U}$.

Proposition 7 . Soit U, V deux parties de E, les propriétés suivantes sont équivalents :
- **U dense dans V.**
- **$\forall x \in V,\ \forall \varepsilon\, 0 \quad U \cap \mathrm{B}(x,\varepsilon) \neq \emptyset$.**
- **$\forall x \in V,\ \forall \varepsilon\, 0,\ U \cap \mathrm{B}(x,\varepsilon)$ contient une infinité d'éléments.**

1.3 Notion de limite

1.3.1 Suites convergentes

Définition 9 . Une suite (x_n) à valeur dans un espace vectoriel normé$(E, \|.\|)$ est dite convergente vers un élément $x \in E$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$. On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$
Dans le cas contraire, où (x_n) n'admet pas de limite dans E, on dit qu'elle est divergente.

Proposition 8 . Soit (x_n) une suite à valeur dans un espace vectoriel normé$(E, \|.\|)$ et $x \in E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- **$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.**
- **$\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0$.**
- **$\forall \varepsilon > 0$, on a $(x_n) \subset \mathrm{B}(x,\varepsilon)$, à partir d'un certain rang.**

Proposition 9 . Toute suite extraite d'une suite convergente, est aussi convergente et converge vers la même limite.

Théorème 1 . Caractérisations séquentielles.
Soit A partie d'un espace vectoriel normé$(E, \|.\|)$ et $x \in E$, on a les caractérisation suivante :
- **$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n) \subset A$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.**
- **A est fermée si et seulement si toute suite à valeurs dans A qui converge, admet sa limite dans A.**

Proposition 10 . Soient $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|)$ deux espace vectoriel normé. Une suite (x_n, y_n) à valeurs dans $E \times F$ converge dans $F \times F$ si et seulement si (x_n) converge dans E et (y_n) converge dans F, dans ce cas

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n, y_n) = (\lim_{n\to+\infty} x_n, \lim_{n\to+\infty} y_n)$$

1.3.2 Notion de limite en un point adhérant.

Définition 10 . Soient $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|)$ deux espace vectoriel normé. Soit X une partie de E et $f : X \longrightarrow F$. Soit $a \in \overline{X}$ et $\ell \in F$.
On dit que f admet ℓ comme limite en a si et seulement si $\lim\limits_{\|x-a\|\to 0} \|f(x) - \ell\| = 0$, on écrit alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell$$

Proposition 11 . Avec les notations de la définition précédente, les propriétés suivantes sont équivalentes :
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.
- $\lim\limits_{d(x-a)\to 0} d(f(x) - \ell) = 0$.
- $\forall \varepsilon > 0,\ \exists r > 0$ **tel que** $\forall x \in X, \quad \|x - a\| < r \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$.
- $\forall \varepsilon > 0,\ \exists r > 0$ **tel que** $f\left(\mathrm{B}(x, r) \cap X\right) \subset \mathrm{B}(\ell, \varepsilon)$.

Théorème 2 . ***Caractérisation séquentielle de la limite.***
Avec les notations de la définition précédente, les propriétés suivantes sont équivalentes :
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.
- **Pour toute suite** (x_n) **à valeurs dans** E **qui converge vers** a**, on a** $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$.

Définition 11 . On définit la notion de limite infinie dans les cas suivants par :
- **Si** $f : \mathbb{R} \longrightarrow F$**, et** $\ell \in F$.
  - **On écrit que** $\lim\limits_{n\to+\infty} f = \ell \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \|f(t) - \ell\| = 0$.
    Plus précisement : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0$ **tel que** $\forall t \in \mathbb{R}$**, on a :** $t > A \Longrightarrow \|f(t) - \ell\| < \varepsilon$.
  - **On écrit que** $\lim\limits_{n\to-\infty} f = \ell \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to-\infty} \|f(t) - \ell\| = 0$.
    Plus précisement : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists A < 0$ **tel que** $\forall t \in \mathbb{R}$**, on a :** $t < A \Longrightarrow \|f(t) - \ell\| < \varepsilon$.
- **Si** $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$**, et** $a \in F$.
  - **On écrit que** $\lim\limits_{x\to a} f = +\infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{\|x-a\|\to 0} f(x) = +\infty$.
    Plus précisement : $\forall A > 0,\ \exists \varepsilon > 0$ **tel que** $\forall x \in E$**, on a :** $\|x - a\| < \varepsilon \Longrightarrow f(x) > A$.
  - **On écrit que** $\lim\limits_{x\to a} f = -\infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{\|x-a\|\to 0} f(x) = -\infty$.
    Plus précisement : $\forall A < 0,\ \exists \varepsilon > 0$ **tel que** $\forall x \in E$**, on a :** $\|x - a\| < \varepsilon \Longrightarrow f(x) < A$.

1.3.3 Relations de comparaison.

Définition 12 . Soit Soient $(E, \|.\|)$ **et** $(F, \|.\|)$ **deux espace vectoriel normé,** $f : (E, \|.\|) \longrightarrow (F, \|.\|)$ **et** $a \in E$.
- **On dira que** f **est dominée par** g **au voisinage de** a **si et seulement si** $\exists M > 0,\ \exists r > 0$ **tel que** $\forall x \in \mathrm{B}(a, r)$**, on a :** $\|f(x)\| \leq M\|g(x)\|$.
  On écrit alors : $f =_a O(g)$.
- **On dira que** f **est négilgeable devant** g **au voisinage de** a **si et seulement si** $\forall \varepsilon > 0,\ \exists r > 0$ **tel que** $\forall x \in \mathrm{B}(a, r)$**, on a :** $\|f(x)\| \leq \varepsilon\|g(x)\|$.
  On écrit alors : $f =_a o(g)$.
- **On dira que** f **est équivalente à** g **au voisinage de** a **si et seulement si** $f - g = o_a(g)$.
  On écrit alors : $f \sim_a g$.

Proposition 12 . Avec les notations de la définition précédente, on a les propriétés suivantes :
- $f =_a O(1) \Longleftrightarrow f$ **est bornée au voisinage de** a.
- $\forall \lambda \neq 0$**, on a** $f =_a O(g) \Longleftrightarrow \lambda f =_a O(g) \Longleftrightarrow f =_a O(\lambda g)$. $f =_a O(1) \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f = 0$.
- $\forall \lambda \neq 0$**, on a** $f =_a o(g) \Longleftrightarrow \lambda f =_a o(g) \Longleftrightarrow f =_a o(\lambda g)$.
- **la relation** $\sim$ **est une relation d'équivalence.**

1.4 Continuité.

Définition 13 . Soit Soient $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|)$ deux espace vectoriel normé, $f : (E, \|.\|) \longrightarrow (F, \|.\|)$ et $a \in E$.
- **On dit que f est continue au point a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.**
- **On dit que f est continue sur une partie X de E si et seulement si f est continue en tout point $x \in X$.**
  L'ensemble de telles fonctions se note $\mathcal{C}(X, F)$.

Proposition 13 .
- **La somme et composée de fonctions continues est continue.**
- **Toute fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^n$ est continue.**
- **Toute fonction lipschitzienne est continue.**
- **L'image réciproque d'un ouvert de F par une application continue est un ouvert de E.**
- **L'image réciproque d'un fermé de F par une application continue est un fermé de E.**

***Application* : Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors :**
- **$\{x \in E$ tel que $f(x)\ \alpha\}$, $\{x \in E$ tel que $f(x) < \alpha\}$ et $\{x \in E$ tel que $\alpha < f(x) < \beta\}$ sont des ouverts.**
- **$\{x \in E$ tel que $f(x) \geq \alpha\}$, $\{x \in E$ tel que $f(x) \leq \alpha\}$ et $\{x \in E$ tel que $\alpha \leq f(x) \leq \beta\}$ sont des fermés.**
- **$\{x \in E$ tel que $f(x) = \alpha\}$ est un fermé, alors $\{x \in E$ tel que $f(x) \neq \alpha\}$ est un ouvert.**

2 Espaces vectoriels de dimension finie.

2.1 Suites de Cauchy

Définition 14 . On appelle suite de Cauchy dans un espace vectoriel normé$(E, \|.\|)$, toute suite (x_n) à valeurs dans E, vérifiant la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p, q \geq n_0 \text{ on a : } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

Proposition 14 . Soit (x_n) une suite à valeurs dans E, les propriétés suivantes sont équivalentes :
- **(x_n) est de Cauchy.**
- **$\forall \varepsilon > 0,\ exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, \forall n \in \mathbb{N}$ on a : $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$.**
- **$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sup\limits_{p \in \mathbb{N}} \|x_{n+p} - x_n\| \right) = 0$.**

Théorème 3 .
- **Toute suite convergente est de Cauchy.**
- **Toute suite de Cauchy qui admet une suite extraite convergente est aussi convergente.**

Définition 15 . un espace vectoriel normé E est dit complet (ou espace de Banach), si toute suite de Cauchy à valeurs dans E, converge dans E.

Théorème 4 . $\mathbb{R}^n$ est complet.

Théorème 5 . Si E est complet, et $f : X \longrightarrow E$ lipshcitzienne, alors f est prolongeable par continuité en tout point $a \in \overline{X}$.

2.2 Compacité.

Proposition 15 . Soit (x_n) une suite à valeurs dans E, et $a \in E$, alors a est une valeur d'adhérance de $(x_n) \Longleftrightarrow \exists (x_{\varphi(n)})$ suite extraite de (x_n) telle que $a = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)}$

Définition 16 . Une partie X d'un espace vectoriel normé$(E, \|.\|)$ est dite compacte, si de toute suite à valeurs dans X, on peut en extraire une sous suite convergente dans X.

Proposition 16 .
- **Toute partie fermée d'une partie compacte est compacte.**
- **Le produit d'une famille finie de compacts est un compact.**
- **L'image d'un compact par une application continue est un compact.**

**Théorème 6 . Théorème de Bolzano-Weierstrass : Toute suite bornée à valeurs dans un espace vectoriel norméde dimension finie possède une valeur d'adhérence.
Autrement dit, on peut en extraire une sous-suite convergente.**

Théorème 7 . Dans un espace vectoriel norméde dimension finie, une partie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

2.3 Connexité par arcs

Définition 17 . Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel norméet $X \subset E$.
- **On appelle chemin dans X, toute application continue $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$.**
- **On dit que X est connexe par arcs si pour tout $x, y \in X,\ \exists \gamma : [0,1] \longrightarrow X$ continue tel que $\gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y$.**

Proposition 17 .
- **Une partie convexe est connexe par arcs.**
- **Les sous-espace vectoriel de E sont connexes par arcs.**
- **L'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arc.**

**Théorème 8 . *Théorème des valeurs intermédiaires* :
Une partie est connexe par arcs dans $\mathbb{R}$ si et seulement si c'est un intervalle.**

Définition 18 . Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel norméet $X \subset E$. La relation définie sur E, par :

$$x, y \in X,\ \exists \gamma : [0,1] \longrightarrow X \text{ continue } \text{ tel que } \gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y$$

**est une relation d'équivalence, dont la classe d'équivalence s'appellent composantes connexes de X.
Pour tout $x \in X$, sa classe d'équivalence se note $C(x)$, et s'appelle la composante connexe de x.**

Proposition 18 . Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel norméet $X \subset E$, on a les propriétés suivantes :
- **Les composantes connexes de X sont des parties connexes de E, maximales pour l'inclusion.**
- **Les composantes connexes d'une partie de $\mathbb{R}$ sont intervalles maximales pour l'inclusion.**
- **Soit $x \in X$ et $f : E \longrightarrow F$ continue, alors $f(C(x)) \subset C(x)$, avec égalité si f est surjective.
En particulier, l'image d'une composante connexe d'un élément par une application continue surjective est la comosante connexe de l'image de cet élément.**

2.4 Normes équivalentes.

Définition 19 . Deux normes N_1 et N_2 sur un espace vectoriel sont dites équivalentes si

$$\exists \alpha, \beta \text{ tel que } \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \beta N_1(x) \quad \forall x \in E.$$

Remarque 1 . Dans un espace vectoriel normé, les notions suivantes sont intrinsèques et ne dépendent pas du choix de la norme entre des normes équivalentes :

- **Les notions de voisinage, ouvert, fermé, adhérance, frontière, densité.**
- **Les notions de suites ou applications bronées.**
- **La notion de suite de Cauchy.**
- **La convergence d'une suite ou l'existence de la limite d'une application en un point adhérant.**
- **La limite d'une suite convergente et celle d'une application en un point adhérant.**
- **La continuité et la notion d'application lipschitzienne.**

Théorème 9 . Dans un espace vectoriel normède dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

3 Normes subordonnées

Définition 20 . Soit $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|)$ deux espace vectoriel normé, l'ensemble des applications linéaires continues de E vers F se note $\mathcal{L}_c(E, F)$, surlequel on définit la norme notée $|||.|||$, appellée norme subordonnées aux normes à celles de E et F, définie par la relation suivante :

$$|||f||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$$

Proposition 19 . Soit $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|)$ deux espace vectoriel normé, $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$, on a les propriétés suivantes :

- $|||f||| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|$.
- $\|f(x)\| \leq |||f||| \|x\| \quad \forall x \in E$.
- $|||f \circ g||| \leq |||f||| |||g|||$ **pour tout** $g \in \mathcal{L}_c(G, E)$**, avec** G **un espace vectoriel normé.**
  En particulier, dans $\mathcal{L}_c(E)$**, la norme subordonnée est une norme d'algèbre.**

Théorème 10 . En dimension finie (départ et arrivée), toutes les applications linéaires, bilinéaires, multinlinéaires sont continues.

Proposition 20 . Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$|||A|||_2 = |||{}^tA|||_2 = \sqrt{|||{}^tAA|||_2}$$

Fin
à la prochaine