# Fonctions holomorphes

*Par* Sadik Boujaida
Professeur agrégé de mathématiques
Lycée Moulay Youssef – Rabat
ibouja@gmail.com

## Table des matières

La notion de fonction holomorphe à été introduite au programme des classes MP, PSI et TSI des CPGE marocaines en 2009. Ce document est une ***proposition***, destinée en premier lieu aux professeurs de ces classes, d'un cours sur le sujet qui s'intègre bien dans l'ensemble du programme.

Les élèves de ces mêmes classes, y trouveront aussi une construction homogène est passablement complète des différentes notions abordées tout en restant conforme aux directives du programme officiel.

Cours
pour filières PSI et MP

# Fonctions holomorphes

*Dans tout le document $\Omega$ désignera un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. Si $z_0$ est un complexe et $r$ est réel strictement positif, $D(z_0, R)$ désignera la boule* ***ouverte*** *de $\mathbb{C}$ de centre $z_0$ et de rayon $r$.*
*L'ensemble $U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big/ \ x+iy \in \Omega\right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ car c'est l'image réciproque de $\Omega$ par l'application linéaire, et donc continue, $(x,y) \longmapsto x+iy$. Une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ peut être confondue avec la fonction $\widetilde{f} : U \longrightarrow \mathbb{C},\ (x,y) \longmapsto f(x+iy)$, on notera en particulier, lorsque $z = x+iy$*

$$\mathrm{d}f(z)\,,\ \frac{\partial f}{\partial x}(z) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(z)$$

*respectivement la différentielle et les dérivées partielles de la fonctions $\widetilde{f}$ au point $(x,y)$.*

*On adoptera les notations du calcul différentiel. Si $f$ est différentiable en $z_0 \in \Omega$ alors $\mathrm{d}f(z_0).h$ désignera la différentielle de $f$ en $z_0$ appliquée au vecteur $h$; et se référant à la base $(1,i)$ de $\mathbb{C}$ on peut donc écrire*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \mathrm{d}f(z_0).1 \ \text{ et } \ \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \mathrm{d}f(z_0).i$$

## Rappels de calcul différentiel

Soient $p$, $n$ et $m$ des enties naturels non nuls, $U$ et $V$ des ouverts respectifs de $\mathbb{R}^m$ et de $\mathbb{R}^n$. Et soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.

1. On considère deux fonctions

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ t \longmapsto \big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_m(t)\big)$$
$$f : V \longrightarrow \mathbb{R}^p,\ x = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \longmapsto f(x)$$

On suppose que $\varphi(I) \subset V$.
Si $\varphi$ et $f$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leurs domaines de définitions respectifs, alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ et pour tout $t \in I$

$$\big(f \circ \varphi\big)'(t) = \mathrm{d}f\big(\varphi(t)\big).\varphi'(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k}\big(\varphi(t)\big)\varphi_k'(t)$$

2. Soient maintenant des fonctions

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ x \longmapsto \big(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)\big)$$
$$g : V \longrightarrow \mathbb{R}^p,\ y = (y_1, y_2, \cdots, y_m) \longmapsto g(y)$$

On suppose que $f(U) \subset V$. Si $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$ et $g$ l'est sur $V$ alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$ et pour tout $x \in U$ et pour tout $k \in [[1, n]]$

$$\mathrm{d}(g \circ f)(x) = \mathrm{d}g\big(f(x)\big) \circ \mathrm{d}f(x)$$

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_k}(x) = \mathrm{d}g\big(f(x)\big).\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_k}\big(f(x)\big)\frac{\partial f_k}{\partial x_k}(x)$$

# I. Fonctions holomorphes

## I.1 Définitions, condition de Cauchy – Riemann

**Définition I.1**

Soit une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.

1. soit $z_0 \in \Omega$. On dit que $f$ est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0$ si et seulement si la fonction :

$$z \longmapsto \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},\ z \in \Omega \backslash \{z_0\}$$

admet une limite dans $\mathbb{C}$ en $z_0$. cette limite est alors notée $f'(z_0)$.

2. On dit que $f$ est holomorphe sur $\Omega$ si et seulement si $f$ est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de $\Omega$ est sa fonction dérivée $f' : z \longmapsto f'(z)$ est continue sur $\Omega$.

**Théorème I.1**

Soit une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.

1. soit $z_0 \in \Omega$. $f$ est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0$ si et seulement si

$$\begin{cases} f \text{ est différentiable en } z_0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0) \text{ (Condition de Cauchy–Riemann )} \end{cases}$$

2. $f$ est holomorphe sur $\Omega$ si et seulement si

$$\begin{cases} f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \Omega \text{ (en tant que fct des 2 variables } x \text{ et } y) \\ \forall z \in \Omega,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(z) = i\dfrac{\partial f}{\partial x}(z) \end{cases}$$

**Preuve :**

1. $\Rightarrow$/ *Si $f$ est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0$. Pour tout $h \in \mathbb{C}$ voisin de 0,*

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = hf'(z_0) + o(|h|)$$

*par définition même de $f'(z_0)$.*
*Donc $f$ est différentiable en $z_0$ et pour tout $h \in \mathbb{C}$, $\mathrm{d}f(z_0).h = hf'(z_0)$.*
*Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \mathrm{d}f(z_0).1 = f'(z_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \mathrm{d}f(z_0).i = if'(z_0)$.*
*On a bien $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0)$.*

$\Leftarrow$/ *Si maintenant $f$ est différentiable en $z_0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0)$. On a pour tout $h = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ voisin de 0*

$$\begin{aligned} f(z_0 + h) - f(z_0) &= \mathrm{d}f(z_0).(h) + o(|h|) \\ &= \alpha\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + \beta\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) + o(|h|) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)(\alpha + i\beta) + o(|h|) \end{aligned}$$

$$= \quad h\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + o(|h|)$$

*Alors $f$ est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0$ et $f'(z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0)$.*

2. *$\Rightarrow$/ Si $f$ est holomorphe sur $\Omega$, alors d'après 1. $f$ est différentiable en tout point de $\Omega$ et pour tout $z \in \Omega$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(z) = f'(z)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z) = if'(z)$. $f'$ étant continue, les dérivées partielles de $f$ sont donc continues. $f$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$.*

   *$\Leftarrow$/ Si $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie les conditions de Cauchy–Riemann, alors d'après 1. $f$ est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de $\Omega$, et l'égalité $f'(z) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(z)$ indique que $f'$ est continue sur $\Omega$. Alors $f$ est holomorphe sur $\Omega$.*

### Remarques

1. **À retenir** : Si $f$ est $\mathbb{C}$-dérivable en $z$ alors

$$\boxed{f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z)}$$

2. Nous verrons qu'une fonction holomorphe sur $\Omega$ est en fait "de classe $\mathcal{C}^\infty$" sur $\Omega$ (et même plus, elle est analytique sur $\Omega$).

3. En posant $z = x + iy$, un procédé de calcul familier chez le voisin physicien (pas complètement faux d'ailleurs ... ) permettrait d'écrire

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial x}{\partial \overline{z}}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \overline{z}}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

   La condition de Cauchy–Riemann serait alors équivalente à : $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.

   Intuitivement l'holomorphie de $f$ signifierait alors que $f(z)$ ne dépend pas de $\overline{z}$.

   On voit ainsi, par exemple, que les fonctions $z \longmapsto \overline{z}$, $z \longmapsto \mathrm{Re}(z)$, $z \longmapsto \mathrm{Im}(z)$, $z \longmapsto |z|$ ne sont holomorphes sur aucun ouvert de $\mathbb{C}$.

4. **Interprétation géometrique de L'holomorphie**

   Une fonction holomorphe $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (au sens différentiel). Pour tout $z \in \Omega$

$$\forall h \in \mathbb{C}, \ \mathrm{d}f(z).h = hf'(z)$$

   Si $f'(z) \neq 0$, $\mathrm{d}f(z)$ est donc la similitude directe du plan complexe de rapport $|f'(z)|$ et d'angle $\mathrm{Arg}\big(f'(z)\big)$.

   Géométriquement, les similitudes conservant les angles, cela signifie que si $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ sont deux arcs de classe $\mathcal{C}^1$ contenus dans $\Omega$ et qui se coupent en un point $z$ alors $f(\Gamma_1)$ et $f(\Gamma_2)$ sont des arcs de classe $\mathcal{C}^1$ contenus dans $f(\Omega)$ et qui se coupent en $f(z)$ selon le même angle que $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$, puisque les tangentes en $f(z)$ à $f(\Gamma_1)$ et à $f(\Gamma_2)$ sont les images par la similitude $\mathrm{d}f(z)$ des tangentes respectives en $z$ à $\Gamma_1$ et à $\Gamma_2$.

### Proposition I.1

Soit une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. On note $P$ et $Q$ les parties réelle et imaginaire de $f$.

$$\forall z \in \Omega\,,\ f(z) = P(z) + iQ(z)$$

$f$ est holomorphe sur $\Omega$ si et seulement si

$$\begin{cases} P \text{ et } Q \text{ sont de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \Omega \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial Q}{\partial y} = \dfrac{\partial P}{\partial x} \end{cases}$$

Preuve : *$f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ ssi $P$ et $Q$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, et la condition de Cauchy–Riemann $\dfrac{\partial f}{\partial y} = i\dfrac{\partial f}{\partial x}$, soit $\dfrac{\partial P}{\partial y} + i\dfrac{\partial Q}{\partial y} = i\dfrac{\partial P}{\partial x} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, et equivalente à $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = \dfrac{\partial P}{\partial x}$*

### Remarques

1. Si $f$ est holomorphe sur $\Omega$ alors la matrice jacobienne de $f$ et son jacobien en un point $z \in \Omega$ dans la base $(1, i)$ sont
$$Jf(z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x}(z) & -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(z) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(z) & \dfrac{\partial P}{\partial x}(z) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad jac\, f(z) = \left(\frac{\partial P}{\partial x}(z)\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(z)\right)^2$$
Noter que sauf si $f'(z) = 0$, on a toujours $jac\, f(z) \neq 0$.
Noter aussi que $jac\, f(z) = \left(\dfrac{\partial P}{\partial x}(z)\right)^2 + \left(\dfrac{\partial P}{\partial y}(z)\right)^2 = \left\|\overrightarrow{\text{grad}} P(z)\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{\text{grad}} Q(z)\right\|^2$
et donc que si jamais $\overrightarrow{\text{grad}} P$ (ou $\overrightarrow{\text{grad}} Q$) est partout nul sur $\Omega$ alors $f'$ est nulle sur $\Omega$.

### Propriétés

Soient deux fonctions $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.

**1.** Si $f$ et $g$ sont holomorphes alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $f + \lambda g$ est holomorphe sur $\Omega$ et
$$(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$$

**2.** Si $f$ et $g$ sont holomorphes sur $\Omega$ alors $fg$ est holomorphe sur $\Omega$ et
$$(fg)' = f'g + fg'$$

**3.** On suppose que $g$ ne s'annule pas sur $\Omega$. Si $f$ et $g$ sont holomorphes sur $\Omega$ alors $\dfrac{f}{g}$ est holomorphe sur $\Omega$ et
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$
En particulier $\dfrac{1}{g}$ est holomorphe sur $\Omega$ et $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$.

Preuve : *Du à la définition de la $\mathbb{C}$-dérivabilté à l'aide de limites, toutes les démonstrations se feront de la même façon que pour les fonctions numériques d'une variable réelle de classe $\mathcal{C}^1$.*

### Remarques

1. On note $\mathcal{O}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\Omega$.
Les propriétés 1. et 2. impliquent que $\mathcal{O}(\Omega)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathbb{C}^{\Omega}$ des fonctions de $\Omega$ dans $\mathbb{C}$.

2. Une récurrence simple permettra de justifier que si $f$ est holomorphe, la fonction $f^p$ est holomorphe pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $(f^p)' = pf'f^{p-1}$.
Attention, on ne parle pas impunément de la fonction $f^{\alpha}$, si $\alpha$ est un réel donné.

3. Comme mentionné auparavant une fonction holomorphe est une fonction de classe $\mathcal{C}^{\infty}$. On définit récursivement les dérivées successives d'une telle fonction de la même manière que pour une fonction numérique de la variable réelle.
Si $f$ et $g$ sont des fonctions holomorphes, la formule de Leibiniz reste valable :
$$\forall p \in \mathbb{N},\ (fg)^{(p)} = \sum_{k=1}^{p} C_k^p f^{(k)} g^{(p-k)}$$

**Proposition I.2**

Soit $\Delta$ un autre ouvert de $\mathbb{C}$. Soit des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que $f(\Omega) \subset \Delta$.
Si $f$ est holomorphe sur $\Omega$ et $g$ est holomorphe sur $\Delta$ alors $g \circ f$ est holomorphe sur $\Omega$ et

$$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$$

**Preuve :** *D'après le théorème sur la condition de Cauchy–Riemann, $f$ et $g$ seraient de classe $\mathcal{C}^1$, donc $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $z \in \Omega$*

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(z) = dg\big(f(z)\big).\frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) \times g'\big(f(z)\big) = f'(z) \times g'\big(f(z)\big)$$

*de même*

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(z) = g'\big(f(z)\big) \times \frac{\partial f}{\partial y}(z) = if'(z) \times g'\big(f(z)\big)$$

*On a bien* $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(z) = i\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(z)$.
*Ainsi $g \circ f$ est holomorphe sur $\Omega$ et pour tout $z \in \Omega$*

$$(g \circ f)'(z) = \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(z) = f'(z) \times g'\big(f(z)\big)$$

**Proposition I.3**

On suppose que $\Omega$ est **connexe par arcs.**
Soit $f$ une fonction holomorphe sur $\Omega$. $f$ est constante sur $\Omega$ si et seulement si $f'$ est nulle sur $\Omega$.

**Preuve :** *$\Omega$ étant connexe par arcs et $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$, on a*
*$f$ est constante sur $\Omega$* $\iff \forall z \in \Omega,\ \mathrm{d}f(z) = 0 \iff \forall z \in \Omega,\ f'(z) = 0.$

**Remarques**

1. Ce résultat nous sera utile pour déduire le DSE d'une fonction holomorphe $f$ si on connait celui de $f'$.

**Exercice 1 : (Fonctions holomorphes de partie réelle nulle)**

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose que $\Omega$ est connexe par arcs.

1. Montrer que si $f$ est à valeurs réelles (ou imaginaires pures) alors elle est forcément constante.
2. Généraliser ce résultat au cas où les valeurs de $f$ restent sur une droite affine de $\mathbb{C}$.

**Théorème I.2 (Inégalité des accroissements finis.)**

On suppose que $\Omega$ est convexe. Soit une fonction $f$ holomorphe sur $\Omega$. Pour tous $a, b \in \Omega$

$$|f(b) - f(a)| \leqslant |b - a| \sup_{t \in [0,1]} \left|f'\big((1-t)a + tb\big)\right|$$

**Preuve :** *Comme dans la démonstration précédente, il suffit d'utiliser le résultat correspondant pour une fonction de plusieurs variables de classe $\mathcal{C}^1$, en l'occurrence l'inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un convexe.*

## I.2 Exemples fondamentaux

**Exemple 1 : Toute fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{C}$ est holomorphe.**

En effet la fonction $z \longmapsto z$ est trivialement holomorphe sur $\mathbb{C}$, de dérivée constante de valeur 1. Donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la fonction $z \longmapsto z^k$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ de dérivée la fonction $z \longmapsto kz^{k-1}$.

Soit alors $P : z \longmapsto \sum_{k=0}^{p} a_k z^k$ une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{C}$. $P$, comme combinaison linéaire de fonctions holomorphes, est holomorphe de dérivée la fonction $P' : z \longmapsto \sum_{k=1}^{p} k a_k z^{k-1}$.

**Exemple 2 : La fonction exponentielle**

En considérant la définition trigonométrique de la fonction exponentielle exp :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

exp est de classe $\mathcal{C}^1$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(e^z) = e^x(\cos y + i\sin y) &= e^z \\ \frac{\partial}{\partial y}(e^z) = e^x(-\sin y + i\cos y) = ie^x(\cos y + i \sin y) &= ie^z\end{aligned}$$

La condition de Cauchy–Riemann est bien remplie : exp est donc holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $\exp' = \exp$.

Soit $\gamma \in \mathbb{C}$, la fonction $f_\gamma : z \longmapsto e^{\gamma z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, comme composée de fonctions holomorphes et $f'_\gamma(z) = \gamma e^{\gamma z}$

Soit maintenant $t \in \mathbb{R}_+^*$, on pose pour tout $z \in \mathbb{C}$, $g(z) = t^z \overset{\text{def}}{=} e^{z\ln t}$.
$g$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ est $g'(z) = \ln(t)e^{z\ln t} = \ln(t)t^z$.
**N.B :** Si $z \in \mathbb{C}$ alors $|e^z| = e^{\text{Re}(z)}$ et donc $|t^z| = t^{\text{Re}(z)}$

**Exemple 3 : Fonctions trigonométriques**

On pose pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \text{ et } \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

Les fonctions $z \longmapsto e^{iz}$ et $z \longmapsto e^{-iz}$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ comme composition de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$, donc cos et sin sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\cos' z = \frac{1}{2}(ie^{iz} - ie^{iz}) = -\sin z \text{ et } \sin' z = \cos z$$

**Exemple 4 : Fonction $\zeta$ de Riemman**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$, $\left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{n^{\text{Re}(z)}}$. Donc si $\text{Re}(z) > 1$ alors la série $\sum \frac{1}{n^z}$ est absolument convergente.
On pose alors $\Omega = \left\{z \in \mathbb{C} \big/ \text{Re}(z) > 1\right\}$ et pour tout $z \in \Omega$

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$$

Fixons alors $y \in \mathbb{R}$ et considérons la fonction $\zeta_y : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+iy}},\ x \in ]1,+\infty[$.

Les fonctions $u_n : x \longmapsto \frac{1}{n^{x+iy}}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et pour tout $x \in ]1,+\infty[$

$$u'_n(x) = -\frac{\ln n}{n^{x+iy}}$$

La série de fonctions $\sum u_n$ CVS sur $]1,+\infty[$, et si on prend $a > 1$ alors pour tout $x \in [a,+\infty[$

$$|u_n(x)| = \frac{\ln n}{n^x} \leqslant \frac{\ln n}{n^a}$$

Donc $\sum u'_n$ CVN sur $[a,+\infty[$, ceci pour tout $a > 1$. Alors la fonction $\zeta_y$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et

$$\forall x \in ]1,+\infty[,\ \zeta'_y(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^{x+iy}}$$

Ainsi $\zeta$ admet une dérivée partielle selon $x$ en tout point $z \in \Omega$ et

$$\forall z \in \Omega,\ \frac{\partial \zeta}{\partial x}(z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^z}$$

De même en considérant pour un $x \in ]1,+\infty[$, la fonction $\zeta^x : y \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+iy}}$, on démontre que $\zeta$ admet une dérivée partielle selon $y$ en tout point de $\Omega$ et que

$$\forall z \in \Omega,\ \frac{\partial \zeta}{\partial y}(z) = -i\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^z}$$

Soit ensuite un compact $K \subset \Omega$. La fonction $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ est continue donc elle est borné est atteint sa borne inférieure sur $K$, en posant $a = \min_{z\in K}\mathrm{Re}(z)$ on a alors $a > 1$ (car $K \subset \Omega$) et

$$\forall z \in K\,,\ \left|\frac{\ln n}{n^z}\right| \leqslant \frac{\ln n}{n^a}$$

La série $\sum \frac{\ln n}{n^a}$ converge donc la série de fonctions $\sum \frac{\ln n}{n^z}$ CVN sur $K$.
$\sum \frac{\ln n}{n^z}$ CVN sur tout compact de $\Omega$ et les fonctions $z \longmapsto \frac{\ln n}{n^z}$ sont continues sur $\Omega$ donc la somme $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^z}$ est continue sur $\Omega$.

Alors les dérivées partielles $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ et $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$ sont continue sur $\Omega$. $\zeta$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$. Elle vérifie en plus la condition de Cauchy–Riemann $\frac{\partial \zeta}{\partial y} = i\frac{\partial \zeta}{\partial x}$, elle est donc holomorphe sur $\Omega$, avec

$$\forall z \in \Omega,\ \zeta'(z) = \frac{\partial \zeta}{\partial x}(z) = -\sum_{z=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^z}.$$

**Exemple 5 : Fonction Γ d'Euler**

Soit $z \in \mathbb{C}$, pour tout $t \in ]0,+\infty[$, $\left|t^{z-1}e^{-t}\right| = t^{\mathrm{Re}(z)-1}e^{-t}$. Donc si $\mathrm{Re}(z) > 0$ alors la fonction $t \longmapsto t^{z-1}e^{-t}$ est continue intégrable sur $]0,+\infty[$.
On pose alors $\mathcal{P}^+ = \left\{z \in \mathbb{C}/\mathrm{Re}(z) > 0\right\}$, et pour tout $z \in \mathcal{P}^+$

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$

Comme pour $\zeta$ on fixe $y \in \mathbb{R}$ est considère la fonction $\Gamma_y : x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x+iy-1}e^{-t}dt$.
On démontre via la formule de Leibniz sur la dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre que $\Gamma_y$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que

$$\forall x \in ]0,+\infty[,\ \Gamma_y'(x) = \int_0^{+\infty}\ln(t)t^{x+iy-1}e^{-t}dt$$

Ce qui justifierait l'existence de $\frac{\partial \Gamma}{\partial x}$ et que

$$\forall z \in \mathcal{P}^+,\ \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(z) = \int_0^{+\infty}\ln(t)t^{z-1}e^{-t}dt$$

Et de la même façon, on démontre l'existence sur $\mathcal{P}^+$ de $\frac{\partial \Gamma}{\partial y}$ avec cette fois

$$\forall z \in \mathcal{P}^+,\ \frac{\partial \Gamma}{\partial y}(z) = i\int_0^{+\infty}\ln(t)t^{z-1}e^{-t}dt$$

On démontre ensuite en utilisant le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre que la fonction $z \longmapsto \int_0^{+\infty}\ln(t)t^{z-1}e^{-t}dt$ est continue sur toute partie de la forme $[a,+\infty[+i\mathbb{R}$ de $\mathcal{P}^+$ et donc sur $\mathcal{P}^+$.
$\Gamma$ serait alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{P}^+$ et vérifierait la condition de Cauchy–Riemann.
On en conclurait que $\Gamma$ est holomorphe sur $\mathcal{P}^+$ et que

$$\forall z \in \mathcal{P}^+,\ \Gamma'(z) = \int_0^{+\infty}\ln(t)t^{z-1}e^{-t}dt$$

**Exemple 6 : Logarithme complexe**

On se propose ici de prolonger la fonction ln sur un ouvert “maximal” $\Omega$ de $\mathbb{C}$, en une fonction holomorphe, tout en conservant la propriété : $\forall z \in \Omega,\ e^{\ln z} = z$.

**Analyse algébrique** (le jeu de mots nous vous aura pas échappé).

Notons que si $z \in \mathbb{C}^*$ et $\omega \in \mathbb{C}$, ($e^\omega$ ne peut être nul puisque $|e^\omega| = e^{\mathrm{Re}(\omega)} > 0$)

$$\begin{aligned} e^\omega = z &\iff |e^\omega| = |z| \text{ et } \arg(e^\omega) = \arg(z) \quad [2\pi] \\ &\iff e^{\mathrm{Re}(\omega)} = |z| \text{ et } \mathrm{Im}(\omega) = \arg(z) \quad [2\pi] \\ &\iff \mathrm{Re}(\omega) = \ln|z| \text{ et } \mathrm{Im}(\omega) = \arg(z) \quad [2\pi] \\ &\iff \omega = \ln|z| + i\arg(z) \quad [2\pi] \end{aligned}$$

On peut constater dès lors qu'une définition analytique de $\ln(z)$ reposera entièrement sur une bonne définition de $\arg(z)$, et que déjà il est possible de donner plusieurs définition à $\ln(z)$ selon la détermination de $\arg(z)$ qu'on choisira (le modulo $2\pi$).

**Construction analytique :**

Soit maintenant $z \in \mathbb{C}^*$ et posons $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On pose aussi $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et soit $\theta$ la détermination de $\mathrm{Arg}(z)$ qui se trouve dans l'intervalle $[-\pi, \pi[$.

On a alors sous caution : $\dfrac{y}{x+r} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta + 1} = \dfrac{2\cos(\theta/2)\sin(\theta/2)}{2\cos^2(\theta/2)} = \tan(\theta/2)$

Sous caution parce que si $y = 0$ et $x \leq 0$ le quotient $y/(x+r)$ serait indéterminé. On devrait alors scarifier ces points (sur l'autel de baptême de Saint–Logarithme), en posant $\Omega = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$. Tant mieux parce que dans ce cas $\theta$ serait pris dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$ ce qui règle aussi le problème de définition de $\tan(\theta/2)$ et même de faire jouer arctan. Ayant $\theta/2 \in ]-\pi/2, \pi/2[$ la dernière égalité est équivalente à

$$\theta = 2\arctan\left(\frac{y}{x+r}\right)$$

On fonce maintenant, en posant

$$\forall z = x + iy \in \Omega,\ f(z) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right) + 2i\arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

ou encore avec les variables $r \in ]0, +\infty[$ et $\theta \in ]-\pi, \pi[$

$$\forall z = re^{i\theta} \in \Omega,\ f(z) = \ln r + i\theta$$

$r$ et $\theta$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $x$ et $y$ donc $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$.

Maintenant qu'on sait que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ on dérive partiellement l'égalité $e^{f(z)} = z$ par rapport à $x$ et à $y$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{f(z)}\right) = 1 \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(e^{f(z)}\right) = i \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \mathrm{d}(\exp)\big(f(z)\big).\dfrac{\partial f}{\partial x}(z) = 1 \\ \mathrm{d}(\exp)\big(f(z)\big).\dfrac{\partial f}{\partial y}(z) = i \end{cases}$$

$$\text{donc} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(z)e^{f(z)} = 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(z)e^{f(z)} = i \end{cases}$$

$$\text{et donc} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(z) = e^{-f(z)} = \dfrac{1}{z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(z) = ie^{-f(z)} = \dfrac{i}{z} \end{cases}$$

$f$ qui est de $\mathcal{C}^1$ vérifie donc la condition Cauchy–Riemann, elle est donc holomorphe sur $\Omega$. Avec comme on pouvait s'y attendre

$$\forall z \in \Omega,\ f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{1}{z}$$

**Résumons** : On pose $\Omega = \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-^*$ et pour tout $z = x + iy \in \Omega$

$$f(z) = \frac{1}{2} \ln\left(x^2 + y^2\right) + 2i \arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \ln|z| + i\arg(z)$$

$\arg(z)$ désignant ici la détermination de l'argument de $z$ dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$.
$f$ est une fonction holomorphe sur $\Omega$ vérifiant :

$$\forall z \in \Omega\,,\ e^{f(z)} = z \text{ et } f'(z) = \frac{1}{z}$$

Vocabulaire : *Si $\Omega$ est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, on appelle détermination du logarithme complexe sur $\Omega$ toute fonction $g$ holomorphe sur $\Omega$ et telle que :*

$$\forall z \in \Omega,\ e^{g(z)} = z$$

*La fonction $f$ ci-dessus est appelée détermination principale du logarithme complexe sur $\Omega = \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$, on la note* ln.

**Exercice 2 : (Déterminations du logarithme complexes)**
Soit $g$ une détermination du logarithme complexe sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-^*$.

1. Montrer que pour tout nombre complexe $z$, $e^z = 1 \Longleftrightarrow z \in 2i\pi\mathbb{Z}$.
2. Montrer que $\Omega$ est connexe par arcs.
3. Montrer alors qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\forall z \in \Omega,\ g(z) = \ln z + 2ik\pi$ ($k$ ne dépend que de $g$ pas de $z$).
4. Soit maintenant $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $h(z) = \ln\left(ze^{-i\alpha}\right) + i\alpha$
   a) Préciser l'ouvert $\Omega_\alpha$ sur lequel est définie $h$.
   b) Montrer que $h$ est une détermination du logarithme complexe sur $\Omega_\alpha$.

## I.3 Un résultat utile

*La proposition suivante nous sera utile dans la suite de ce cours.*

**Proposition I.4**

Soit une fonction holomorphe $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.

1. Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(I) \subset \Omega$.
   Alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ et :
   $$\forall t \in I,\ (f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) f'(\varphi(t))$$
2. Soient $V$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\Phi : V \longrightarrow \mathbb{C},\ (s,t) \longmapsto \Phi(s,t)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\Phi(V) \subset \Omega$.
   Alors $f \circ \Phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $V$ et pour tout $(s,t) \in V$ :
   $$\begin{cases} \dfrac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial s}(s,t) & = f'\big(\Phi(s,t)\big)\dfrac{\partial f}{\partial s}(s,t) \\ \dfrac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial t}(s,t) & = f'\big(\Phi(s,t)\big)\dfrac{\partial f}{\partial t}(s,t) \end{cases}$$

Preuve : *Les deux énoncés découlent de l'expression de la différentielle de la fonction holomorphe $f$ et des résultats de calcul différentiel rappelé au début de ce cours.*

# II. Fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, fonctions analytiques

## II.1 Définitions et premières propriétés

**Définition II.1**

Soit une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.

1. $f$ est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\Omega$ si et seulement si
$$\begin{cases} \text{f est holomorphe sur } \Omega \\ f' \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \Omega \end{cases}$$
( Si, si cela fonctionne très bien).
On définit alors la suite des fonctions dérivées successives $(f^{(n)})_n$ de $f$ par
$$\begin{cases} f^{(0)} = f \\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)' \end{cases}$$
2. $f$ est dite analytique sur $\Omega$, si et seulement pour tout $z_0 \in \Omega$, $f$ est "développable en série entière sur un voisinage de $z_0$", c'est à dire
$$\forall z_0 \in \Omega,\ \exists r > 0,\ \exists (a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}};\ D(z_0, r) \subset \Omega \text{ et } \forall z \in D(z_0, r),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

**Remarques**

1. On montrera dans ce paragraphe que toute fonction holomorphe est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on comprend alors pourquoi il est inutile de parler, pour $n \in \mathbb{N}^*$, de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ de la variable complexe.

**Lemme II.1**

Soit une suite $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^{n-1}$ ont le même rayon de convergence.

**Preuve :** *Soient $R$ et $R'$ les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^{n-1}$. Soit $z \in D(0,R)$, et soit alors $r \in ]\,|z|\,, R[$. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*
$$\left|n a_n z^{n-1}\right| = \frac{1}{r} n \left(\frac{|z|}{r}\right)^{n-1} |a_n|\, r^n \text{ avec } n \left(\frac{|z|}{r}\right)^{n-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
*Donc $n a_n z^{n-1} = o\left(|a_n|\, r^n\right)$. Comme $r < R$ alors la série $\sum |a_n|\, r^n$ converge et donc $\sum n a_n z^{n-1}$ converge.*
*Pour tout $z$ de module inférieur à $R$ la série $\sum n a_n z^{n-1}$ converge donc $R' \geqslant R$.*
*Inversement $a_n z^n = O\left(n a_n\, |z|^{n-1}\right)$ implique que $\sum a_n z^n$ converge si $\sum n a_n z^{n-1}$ converge absolument.*
*Alors $R \geqslant R'$.*
*Ainsi $R' = R$.*

**Proposition II.1**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et soit $f$ sa somme sur le disque ouvert $D(0,R)$

1. $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $D(0,R)$, et pour tout $p \in \mathbb{N}$
$$\forall z \in D(0,R)\,,\ f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1) z^{n-p}$$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$
3. Pour tout $r \in ]0, R[$ et $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{1}{2\pi r^n} \displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) e^{-in\theta} d\theta$.

**Preuve :**

1. *Montrons d'abords que $f$ est holomorphe sur $D(0,R)$.*
*Soit $z_0 \in D(0,R)$. Pour tout $z \in D(0,R)\setminus\{0\}$*

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{1}{z-z_0}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z^n - z_0^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\left(\sum_{k=0}^{n-1} z_0^k z^{n-k-1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n u_n(z)$$

*où on a posé $u_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z_0^k z^{n-k-1}$. Posons $\rho = \frac{1}{2}\big(|z_0|+R\big)$ si $R$ est fini, $\rho = 1+|z_0|$ si $R$ est infini.*
*Dans les deux cas on a $|z_0| < \rho < R$.*
*Pour tout $z \in D(0,\rho)$, $|a_n u_n(z)| \leqslant n\,|a_n|\,\rho^{n-1}$*
*La série entière $\sum n a_n z^{n-1}$ a le même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$, a savoir $R$. Comme $\rho < R$ alors la série $\sum n\,|a_n|\,\rho^{n-1}$ est convergente et donc la série de fonctions $\sum a_n u_n$ CVN sur le disque $D(0,\rho)$. Les fonctions $u_n$ étant continues, la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n u_n$ est donc continue sur $D(0,\rho)$ et en particulier en $z_0$. On en déduit que*

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n u_n(z_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z_0^{n-1}$$

*Alors $f$ est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0$, et $f'(z_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z_0^{n-1}$, ceci pour tout $z_0 \in D(0,R)$.*

*$f'$ est elle même la somme d'une série entière de rayon de convergence $R$, elle est donc continue sur $D(0,R)$. Ainsi $f$ est holomorphe sur $D(0,R)$ et*

$$\forall z \in D(0,R)\,,\ f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}.$$

*$f'$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R$, ce qui précède démontre qu'elle est elle même holomorphe. On démontre ainsi par récurrence que $f$ et toutes ses dérivées sont holomorphes. Alors $f$ est de classe $C^\infty$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$*

$$\forall z \in D(0,R),\ f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)z^{n-p}$$

2. *Découle immédiatement de l'expression de $f^{(p)}$ donnée précédemment.*
3. *Soit $r \in ]0,R[$, et soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $\theta \in [0,2\pi]$*

$$f\left(re^{i\theta}\right)e^{-ip\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{i(n-p)\theta} \text{ avec pour tout } n \in \mathbb{N},\ \left|a_n r^n e^{i(n-p)\theta}\right| = |a_n|\,r^n$$

*$0 < r < R$ donc la série $\sum |a_n|\,r^n$ converge et donc la série de fonction $\sum a_n r^n e^{i(n-p)\theta}$ CVN sur le segment $[0,2\pi]$. Une intégration terme à terme est donc possible, et sachant que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\int_0^{2\pi} e^{ik\theta}d\theta = 2\pi\delta_{k0}$, elle donne*

$$\int_0^{2\pi} f\big(re^{i\theta}\big)e^{-ip\theta}d\theta = 2\pi a_p r^p$$

### Applications

1. **D.S.E. de la fonction $z \longmapsto \ln(1+z)$**
Considérons la fonctions $f : z \longmapsto \ln(1+z)$ bien définie sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{C}\setminus\,]-\infty,-1]$. ln désignant la détermination principale du logarithme complexe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$.
$f$ est holomorphe sur $\Omega$ par composition de fonctions holomorphes et

$$\forall z \in \Omega\,,\ f'(z) = \frac{1}{1+z}$$

Considérons maintenant la fonction $g$ somme de la série entière $\sum(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$ sur son disque de convergence $D(0,1)$.
$g$ est holomorphe sur $D(0,1)$ et pour tout $z \in D(0,1)$

$$g'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$$

$g-f$ est holomorphe de dérivée nulle sur le convexe $D(0,1)$, elle y'est donc constante.

Comme $f(0) = g(0) = 0$ alors

$$\forall z \in D(0,1)\ ,\ f(z) = \ln(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$$

**Exercice 3 : (Théorème de Liouville)**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini, et soit $f$ sa somme sur $\mathbb{C}$. Montrer que si $f$ est bornée sur $\mathbb{C}$, alors $f$ est constante.

**Corollaire II.1.1**

Soit $f$ une fonction analytique sur $\Omega$

1. $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\Omega$.
2. Soit $z_0 \in \Omega$, et soit $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset \Omega$ et
$$\forall z \in D(z_0, r),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$
Alors
   - $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$
   - $\forall \rho \in ]0, r[\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ a_n = \dfrac{1}{2\pi\rho^n} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$

Preuve : *Soit $z_0 \in \Omega$ et soient $r > 0$ et $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tels que*

$$\forall z \in D(z_0, r)\ ,\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

*Posons alors pour tout $h \in D(0, r)$, $g(h) = f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n$.*
*$g$ est la somme d'une série entière sur $D(0, r)$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $D(0, r)$.*
*Maintenant puisque pour tout $z \in D(z_0, r)$, $f(z) = g(z - z_0)$ alors $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $D(z_0, r)$.*
*Ainsi pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que $f$ soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $D(z_0, r)$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\Omega$.*
*Ensuite, en reprenant la fonction $g$ définie précédemment pour le point $z_0$ on aura pour tout $n \in \mathbb{N}$*
$a_n = \dfrac{g^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.
*et pour tout $\rho \in ]0, r[$, $a_n = \dfrac{1}{2\pi\rho^n} \displaystyle\int_0^{2\pi} g(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = \dfrac{1}{2\pi\rho^n} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$*

**Remarques**

1. Soit $f$ une fonction analytique sur $\Omega$ et soit $z_0 \in \Omega$, $r > 0$ et $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tels que
$$\forall z \in D(z_0, r),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$
Soit $\rho \in ]0, r[$. On a alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}$
$$f\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \rho^n e^{in\theta}$$
En posant $c_n = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right) e^{-in\theta} d\theta$, l'expression intégrale du coefficient $a_n$ donne $c_n = a_n \rho^n$ et donc
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ f\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{in\theta}$$
On reconnait là le développement en série de Fourier de la fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, $2\pi$-périodique $\theta \longmapsto f\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right)$, qui obligatoirement va vérifier $c_n = 0$ si $n < 0$.
Cette observation servira de base dans la démonstration de l'analycité d'une fonction holomorphe.

## II.2 Analycité d'une fonction holomorphe

Théorème II.1

Toute fonction holomorphe sur $\Omega$ est analytique sur $\Omega$.
Plus précisément, soit $f$ une fonction holomorphe sur $\Omega$ et soit $z_0 \in \Omega$. Posons

$$R = sup\left\{r > 0 \big/ D(z_0, r) \subset \Omega\right\}$$

avec la convention $R = +\infty$ si ce dernier ensemble n'est pas majoré.
Alors il existe une suite $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall z \in D(z_0, R),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Preuve : *(D'après CNC 2008 Maths I)*

*Soit $z_0 \in \Omega$. Le fait que $\Omega$ soit un ouvert assure que l'ensemble $\left\{r > 0 \big/ D(z_0, r) \subset \Omega\right\}$ est non vide, s'il est majoré on note $R$ sa borne supérieure, sinon on pose $R = +\infty$. (Noter qu'on ne peut avoir $R = +\infty$ que si $\Omega = \mathbb{C}$ parce qu'on devrait avoir : $\forall r > 0, D(0, R) \subset \Omega$)*

*Soit maintenant $\rho \in ]0, R[$ et considérons la fonction $\varphi : \theta \longmapsto f(z_0 + \rho e^{i\theta})$, $\theta \in \mathbb{R}$.*

*$\varphi$ est une fonction $2\pi$-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et d'une fonction holomorphe. Sa série de Fourier converge donc normalement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est $\varphi$.*

*Posons pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(\rho) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{\infty} \varphi(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$*

*On a alors*

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \varphi(\theta) = f(z_0 + \rho e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(\rho) e^{in\theta} \qquad (1)$$

*Soit $n \in \mathbb{Z}$ et intéressons nous maintenant à la fonction*

$$c_n : \rho \longmapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta,\ \rho \in [0, R[.$$

*Pour cela on considère la fonction $\Psi : (\rho, \theta) \longmapsto f(z_0 + \rho e^{i\theta})$ définie sur $U = [0, R[\times[0, 2\pi]$. de sorte que pour tout $\rho \in [0, R[$*

$$c_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\rho, \theta) e^{-in\theta} d\theta$$

*$\Psi$ est la composée de la fonction $(\rho, \theta) \longmapsto z_0 + \rho e^{i\theta}$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$ et de la fonction $f$ qui est holomorphe sur $\Omega$, une proposition du paragraphe précédent affirme que $\Psi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$ et que $\dfrac{\partial \Psi}{\partial \rho}(\rho, \theta) = f'(z_0 + \rho e^{i\theta}) \dfrac{\partial}{\partial \rho}(z_0 + \rho e^{i\theta}) = e^{i\theta} f'(z_0 + \rho e^{i\theta})$*

*Alors $c_n$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, R[$ d'après le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre (sur un segment) et*

$$\forall \rho \in [0, R[,\ c_n'(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(z_0 + \rho e^{i\theta}) e^{i(1-n)\theta} d\theta$$

*Soit $\rho \in ]0, R[$, en utilisant la fonction $\theta \longmapsto f'(z_0 + \rho e^{i\theta}) e^{i\theta}$ dérivée de la fonction de classe $\mathcal{C}^1$, $\theta \longmapsto \dfrac{1}{i\rho} f(z_0 + \rho e^{i\theta})$, une intégration par parties donne*

$$c_n'(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left( \left[ \frac{e^{-in\theta}}{i\rho} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) \right]_0^{2\pi} + \frac{in}{i\rho} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \right) = \frac{n}{\rho} c_n(\rho)$$

*La fonction $c_n$ est donc une solution sur $]0, R[$ de l'équation différentielle : $\rho \dfrac{dc}{d\rho} - nc = 0$*

*On en déduit qu'il existe une constante $a_n$ telle que*

$$\forall \rho \in ]0, R[,\ c_n(\rho) = a_n \rho^n$$

*Comme $c_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, R[$, elle est continue en 0. L'expression de $c_n$ implique alors forcément que $a_n = 0$ si $n < 0$. et donc*

$$n < 0 \Longrightarrow \forall \rho \in [0, R[,\ c_n(\rho) = 0$$

*La relation (1) devient alors :*

$$\forall \rho \in [0, R[,\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ f(z_0 + \rho e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \rho^n e^{in\theta}$$

*Puisque tout élément de $D(z_0, R)$ peut s'écrire sous la forme $z = z_0 + \rho e^{i\theta}$ où $\rho \in [0, R[$ et $\theta \in \mathbb{R}$ alors*

$$\forall z \in D(z_0, R),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

**Corollaire II.1.1**

Toute fonction $f$ holomorphe sur $\Omega$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\Omega$. En particulier $f'$ est aussi holomorphe sur $\Omega$.

**Applications**

1. Soit $f$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Si $f$ ne s'annule pas sur $D(0,R)$, alors $\dfrac{1}{f}$ est développable en série entière sur $D(0,R)$.

   **En effet;** $\dfrac{1}{f}$ est holomorphe sur $D(0,R)$ donc elle est analytique sur $D(0,R)$. Si $R'$ est le rayon de convergence de son développement en 0 alors
   $$R' \geqslant \sup\left\{r > 0 \big/ D(0,r) \subset D(0,R)\right\}, \text{ soit } R' \geqslant R.$$

2. **$\mathbb{C}$ est algébriquement clos**

   Tout polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{C}$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$. (On en déduit ensuite que tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé).

   **En effet;** soit $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$.
   Supposons que $P$ n'admet pas de racines dans $\mathbb{C}$, et montrons qu'il est forcément constant.
   $P$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$ donc la fonction $f = 1/P$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
   Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ on peut écrire
   $$P(z) - a_nz^n = z^n\left(\frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \cdots \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right)$$
   avec
   $$\frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \cdots \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \underset{|z|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
   On a donc $P(z) - a_nz^n = o(|z|^n)$. On en déduit que $|P(z)| \underset{|z|\to+\infty}{\sim} |a_n|\,|z|^n$ et donc que $|P(z)| \underset{|z|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

   il existe donc $R > 0$ tel que : $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| > R \Longrightarrow |f(z)| = \dfrac{1}{|P(z)|} \leqslant 1.$

   $f$ étant continue sur le compact $\overline{D}(0,R)$ elle y est bornée, en posant
   $$M = max\Big(1, \sup_{|z|\leqslant R} |f(z)|\Big)$$
   on a alors : $\forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leqslant M.$
   $f$ holomorphe sur $\mathbb{C}$ et elle est borné sur $\mathbb{C}$. D'après le théorème de Liouville, elle est constante sur $\mathbb{C}$. $P$ est donc constant sur $\mathbb{C}$.

## II.3 Principe des zéros isolés

**Lemme II.2**

On suppose que $\Omega$ est connexe par arcs. Soit $W$ une partie de $\Omega$.
Si $W$ est à la fois un ouvert et un fermé relatifs de $\Omega$ alors il est soit vide soit égal à $\Omega$.

**Preuve :** *Supposons par l'absurde que $W$ est un fermé et un ouvert relatifs de $\Omega$ et qu'il est non vide et inclu strictement dans $\Omega$.*
*Posons alors $F = \Omega\backslash W$. $W$ et $F$ sont des fermés relatifs non vides de $\Omega$. Soient donc $a \in W$ et $b \in F$. $\Omega$ est connexe par arcs, il existe donc une fonction continue $\varphi : [0,1] \longrightarrow \Omega$ telle que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$.*
*Par continuité de $\varphi$ les ensembles $J = \varphi^{-1}(W)$ et $K = \varphi^{-1}(F)$ sont des fermés de $[0,1]$ et donc de $\mathbb{R}$, qui forment en plus une partition de $[0,1]$.*

*$J$ est une partie non vide majoré de $\mathbb{R}$, elle admet donc une borne supérieure $\beta$, et puisque $J$ est fermé alors $\beta \in J$. $1 \in K$ donc $\beta < 1$ et puisque $\beta = \sup J$ alors $]\beta, 1] \subset K$,*
*$K$ étant lui même un fermé, le fait d'avoir $\beta \notin K$ et $]\beta, 1] \subset K$ mène à une contradiction.*

**Lemme II.3**

On suppose que $\Omega$ est connexe par arcs. Soit $f$ une fonction holomorphe sur $\Omega$. S'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(z_0) = 0$$

Alors $f$ est nulle sur $\Omega$.

---

Preuve : *On suppose qu'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $f^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On considère alors l'ensemble non vide*

$$W = \left\{ z \in \Omega \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(z) = 0 \right\}$$

***$W$ est un fermé relatif de $\Omega$***

$$W = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left( f^{(n)} \right)^{-1} (\{0\})$$

*les ensembles $\left( f^{(n)} \right)^{-1} (\{0\})$ sont des fermés de $\Omega$ car ils sont des images réciproques du fermé $\{0\}$ par des applications continues. $W$ est donc une intersection de fermés de $\Omega$, il est lui même un fermé de $\Omega$.*
***$W$ est un ouvert relatif de $\Omega$.***
*Soit $\omega \in W$, $f$ étant holomorphe sur $\Omega$, elle est analytique sur $\Omega$. il existe donc $r > 0$ tel que $D(\omega, r) \subset \Omega$ et*

$$\forall z \in D(\omega, r),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\omega)}{n!} (z - \omega)^n$$

*et puisque $\omega \in W$ alors $f$ est nulle sur $D(\omega, r)$ et donc $D(\omega, r) \subset W$.*
*Ainsi $W$ est un ouvert relatif de $\Omega$*
***Conclusion :** $W$ est un ouvert et un fermé relatifs de $\Omega$, qui est non vide. D'après le premier lemme, il est égal à $\Omega$. $f$ ainsi que ses dérivées successives sont donc nulles sur $\Omega$.*

**Théorème II.2 (Principe des zéros isolés)**

On suppose que l'ouvert $\Omega$ est connexe par arcs.
Soit $f$ une fonction holomorphe sur $\Omega$ qu'on suppose non partous nulle sur $\Omega$.
Soit $z_0 \in \Omega$. Si $z_0$ est un zéro de $f$, alors il existe $r > 0$ tel que et

$$D(z_0, r) \subset \Omega \text{ et } \left( \forall z \in D(z_0, r) \backslash \{z_0\},\ f(z) \neq 0 \right)$$

On dit que les zéros de $f$ sont des points isolés de $\Omega$.

---

Preuve : *Puisque $f$ est non nulle, d'après le deuxième lemme il existe au moins un $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Soit donc*

$$p = \min \left\{ n \in \mathbb{N} \,/\, f^{(n)}(z_0) \neq 0 \right\}$$

*$f$ est analytique donc il existe $\rho > 0$ tel que $D(z_0, \rho) \subset \Omega$ et*

$$\forall z \in D(z_0, \rho),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

*et par définition de $p$*

$$\forall z \in D(z_0, \rho),\ f(z) = (z - z_0)^p g(z) \text{ avec } g(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-p}$$

$g(z_0) = \dfrac{f^{(p)}(z_0)}{p!} \neq 0$ *et $g$, somme d'une série entière, est continue sur $D(z_0, \rho)$.*
*La continuité de $g$ en $z_0$ assure l'existence d'un $r \in ]0, \rho]$ tel que pour tout $z \in D(z_0, r)$, $|g(z)| \geqslant \frac{1}{2} |g(z_0| > 0$.*
*On a alors :* $\forall z \in D(z_0, r) \backslash \{z_0\},\ f(z) = (z - z_0)^p g(z) \neq 0$.

## Exercice 4 : (Zéros d'une fonction holomorphe)

Soit $f$ une fonction holomorphe sur $\Omega$. On note $Z_f$ l'ensemble des zéros de $f$ dans $\Omega$.

1. Montrer que $Z_f$ est un fermé.
2. Montrer que toute suite convergente d'éléments de $Z_f$ est forcément stationnaire.

3. En déduire que que toute partie bornée de $\Omega$ contient au plus un nombre fini de zéros de $f$.

**Exercice 5 : (DSE de la fonction $1/f$)**

$\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et $f$ sa somme sur $D(0,R)$. On suppose que $f(0) \neq 0$. On reprend la notation $Z_f$ de l'exercice précédent et on suppose que $Z_f \neq \varnothing$.

1. Montrer que $d(0, Z_f) > 0$. On pose $r = d(0, Z_f)$.
2. Montrer que $\dfrac{1}{f}$ est développable en série entière sur $D(0,r)$.

**Exercice 6 : (Principe du prolongement analytique)**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions holomorphes sur $\Omega$.
Utiliser le principe des zéros isolés pour montrer que si $f$ et $g$ prennent les mêmes valeurs au voisinage d'un point quelconque de $\Omega$ alors elles sont partout égales sur $\Omega$.

# III. Transformée de Laplace

Soit une fonction continue $f : [0,+\infty[ \longrightarrow \mathbb{C}$.
On suppose qu'il existe $C > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in [0,+\infty[\,,\ |f(t)| \leqslant Ce^{at}$$

On considère alors l'ouvert $\Omega = \left\{z \in \mathbb{C} \,\big/\, \mathrm{Re}(z) > a\right\}$ et on pose pour tout $z \in \Omega$,

$$Lf(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt.$$

La fonction $Lf$ est appelée transformée de Laplace de $f$.

**Proposition III.1**

$Lf$ bien est définie et elle est holomorphe sur $\Omega$. De plus

$$\forall z \in \Omega\,,\ (Lf)'(z) = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-zt}dt$$

---

Preuve : *Soit $z \in \Omega$, $\left|f(t)e^{-zt}\right| = |f(t)|\,e^{-t\mathrm{Re}(z)} \leqslant Ce^{(a-\mathrm{Re}(z))t}$ avec $a - \mathrm{Re}(z) < 0$.*
*donc la fonction $t \longmapsto f(t)e^{-zt}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et par suite $Lf$ est bien définie en $z$.*
*On peut comme pour la fonction $\Gamma$ d'Euler, considérer les fonctions partielles $x \longmapsto Lf(x+iy)$ et $y \longmapsto Lf(x+iy)$ et ainsi calculer les dérivées partielles de $Lf$ selon $x$ et $y$ via la formule de Leibniz.*
*On va s'y prendre toutefois autrement. Soit $z \in \Omega$ et montrons que $f$ est $\mathbb{C}$-dérivable en $z$ par caractérisation séquentielle en s'aidant du théorème de la convergence dominée, technique utilisée notamment dans la démonstration même du théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre.*
*Soit donc une suite $(z_n)_n$ d'éléments de $\Omega\backslash\{z\}$ qui converge vers $z$.*

$$\frac{Lf(z_n) - Lf(z)}{z_n - z} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-z_n t} - e^{-zt}}{z - z_n} f(t)dt$$

*et posons pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,+\infty[$*

$$\varphi_n(t) = f(t)\frac{e^{-z_n t} - e^{-zt}}{z_n - z}$$

*les fonctions $\varphi_n$ sont continues sur $[0,+\infty[$ et pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $z \longmapsto e^{-tz}$ étant holomorphe, la suite $\left(\varphi_n(t)\right)_n$ converge vers $-tf(t)e^{-zt}$. La suite de fonctions $(\varphi_n)_n$ converge donc simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction $\varphi : t \longmapsto -tf(t)e^{-zt}$.*
*L'inégalité des A.F. appliquée à la fonction $z \longmapsto e^{-tz}$ donne ensuite pour tout $t \in [0,+\infty[$*

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ \left|e^{-tz_n} - e^{-tz}\right| &\leqslant t \sup_{u\in[0,1]} \left|e^{-t\left((1-u)z_n + uz\right)}\right| |z - z_n| \\ &\leqslant t \sup_{u\in[0,1]} e^{-t\left((1-u)\mathrm{Re}(z_n) + u\mathrm{Re}(z)\right)} |z - z_n|\end{aligned}$$

*comme $z$ et les termes $z_n$ sont dans $\Omega$ alors $\mathrm{Re}(z) > a$ et $\mathrm{Re}(z_n) > a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $\left(\mathrm{Re}(z_n)\right)_n$ converge vers $\mathrm{Re}(z)$ donc en posant $b = (a + \mathrm{Re}(z))/2$, $b < \mathrm{Re}(z)$ donc il existe un rang $N$ à partir duquel on aura $\mathrm{Re}(z_n) \geqslant b$. Alors*

$$\forall n \geqslant N,\ \left|e^{-tz_n} - e^{-tz}\right| \leqslant te^{-bt}\,|z_n - z|$$

*On aura ainsi*

$$\forall n \geqslant N, \forall t \in [0, +\infty[,\ |\varphi_n(t)| \leqslant t\,|f(t)|\,e^{-bt} \leqslant Cte^{(a-b)t}$$

*La fonction $t \longmapsto Cte^{(a-b)t}$ étant continue intégrable sur $[0, +\infty[$.*
*D'après le théorème de la convergence dominée la suite $\left(\int_{[0,+\infty[} \varphi_n\right)_n$ converge vers $\int_{[0,+\infty[} \varphi$, ie*

$$\lim \frac{Lf(z_n) - Lf(z)}{z_n - z} = \lim \int_{[0,+\infty[} \varphi_n = \int_{[0,+\infty[} \varphi = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-zt}dt$$

*Ainsi $Lf$ est $\mathbb{C}$-dérivable en $z$ et*

$$(Lf)'(z) = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-zt}dt$$

*La continuité de $(Lf)'$ se justifie maintenant en notant la continuité de la fonction $(z, t) \longmapsto -tf(t)e^{-zt}$ et en utilisant la domination sur toute partie $[\alpha, +\infty[\times[0, +\infty[$ de $\Omega$ $(\alpha > a)$*

$$\left|tf(t)e^{-zt}\right| \leqslant Cte^{(\alpha-a)t}$$