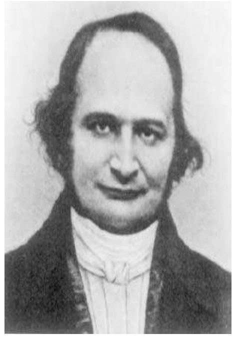
Série 6 Calcul différentiel

Blague du jour

C'est l'histoire de deux belles fonctions f et g définies sur un intervalle I, telles que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in I$.
- Regardez-moi, comme je suis belle ! dit $g(x)$.
- Oui mais tu as tout copié sur moi... répond $f(x)$.
- g, vexée, revient le lendemain, relookée et habillée en $x + h$.
- Salut, lance $g(x + h)$.
- Mais, qu'est ce que tu as ? demande $f(x)$.



Charles Gustave Jacob Jacobi, (1804-1851)

Mathématicien allemand. Il obtient son doctorat l'âge de 21 ans. Jacobi a écrit le traité classique sur les fonctions elliptiques, d'une importance capitale en physique mathématique. Il est l'un des fondateurs de la théorie des déterminants. En particulier, on lui doit le déterminant de la matrice (dite jacobienne) qui est crucial dans le calcul infinitésimal, et qui joue un rôle important dans la résolution de problèmes non-linaires et en robotique.

Mathématicien du jour

Dérivées partielles.

Exo 1 **Différentielle d'une forme quadratique.**

① Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ et f la forme bilinéaire symétrique associée.
Montrer que : $\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n,\ dq_{\vec{x}}(\vec{y}) = 2f(\vec{x}, \vec{y})$.

② Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en déduire la différentielle de l'application
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X & \longmapsto & {}^tXMX \end{array}$$

Exo 2 Soit U l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré n et à racines réelles simples.

① Montrer que U est ouvert dans $\mathbb{R}_n[X]$.

② Pour $P \in U$ on note $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ les racines de P.
Montrer que l'application $P \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exo 3 **Différentielle du déterminant.**

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \det M \end{array}$

① Montrer que f est et que l'on a pour $M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
$$df_M(H) = \operatorname{tr}({}^t\operatorname{com}(M).H)$$

② **Application** : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P_M(X) = (-1)^n X^n + \cdots + a_1 X + \det(M)$.
Montrer $a_1 = \operatorname{tr}(\operatorname{com}(A))$.

Exo 4 **Formule de Leibniz.**

Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que
$$\frac{\partial^n(fg)}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} . \frac{\partial^{n-i-j} g}{\partial x^{k-i} \partial y^{n-k-j}}.$$

Exo 5

Résoudre les équations aux dérivées partielles (EDP) suivantes, préciser le domaine de validité des solutions :

① $2\frac{\partial f}{\partial x}+3\frac{\partial f}{\partial y}=4f$ avec la condition aux limites : $f(t,t)=t,\ \forall t\in\mathbb{R})$.

☛ Indication : Étudier $\varphi : t\mapsto f(a+bt,a+ct)$ avec a,b,c bien choisis.

② $\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=a$ où a est une constante réelle donne.

☛ Indication : On utilisera le changement de variable : $u=x+y$, $v=x-y$.

③ $x\frac{\partial f}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial y}$, en posant $u=xy,\ v=\frac{x}{y}$.

④ $x\frac{\partial f}{\partial x}=-y\frac{\partial f}{\partial y}$, en posant $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$.

⑤ $y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}=2f$, en posant $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$.

⑥ $2xy\frac{\partial f}{\partial x}+(1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y}=0$, en utilisant, par exemple, le changement de variable : $x=\frac{u^2+v^2}{2}$ et $y=\frac{u}{v}$.

⑦ $x^2\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}=\alpha(\alpha-1)f$ où α est un réel fixé, $\alpha\neq\frac{1}{2}$.
On posera $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$.

⑧ $x^2\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}=0$.

On utilisera le changement de variables : $u=xy, v=\frac{x}{y}$.

Exo 6

Laplacien.

Soit $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On pose

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}+\frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}\quad \text{laplacien de } f.$$

① **Laplacien en coordonnes polaires.**

On pose $g(\rho,\theta)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$.

a Calculer $\frac{\partial g}{\partial\rho},\frac{\partial g}{\partial\theta},\frac{\partial^2 g}{(\partial\rho)^2},\frac{\partial^2 g}{(\partial\theta)^2}$ en fonction des drives partielles de f.

b Exprimer Δf en fonction des drives de g.

② **Laplacien en coordonnes sphériques.**

Soient $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, soit

$$\Phi:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (r,\theta,\varphi) & \longmapsto & (x=r\cos\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\cos\varphi, z=r\sin\varphi)\end{array}$$

et $F=f\circ\Phi$. On pose $\Delta f=\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}+\frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}+\frac{\partial^2 f}{(\partial z)^2}$ laplacien de f.

vérifier que : $(\Delta f)\circ\Phi=\frac{\partial^2 F}{(\partial r)^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{(\partial\varphi)^2}-\frac{\tan\varphi}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\varphi}+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2 F}{(\partial\theta)^2}$.

Pour cet exercice, il est conseillé de prendre la feuille dans le sens de la longueur, et d'y aller calmement, en vérifiant ses calculs.

Exo 7

Les isométries conservent le laplacien.

Soit $\varphi:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ une isométrie pour la norme $\|.\|_2$., i.e, vérifie $\|\varphi(x)\|_2=\|x\|_2,\quad\forall x\in\mathbb{R}^2$

① Montrer que la matrice jacobienne de φ est constante, égale à la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de la partie linaire de φ.

② Soit $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que $(\Delta f)\circ\varphi=\Delta(f\circ\varphi)$.

Exo 8

Laplacien en dimension finie.

① Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$.
On définit une application F de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ par :
$F(x_1,\dots,x_n) = f(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2})$. Calculer le laplacien ($\Delta F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{(\partial x_i)^2}$) de F en fonction de f.

② Soit u une fonction réelle des variables réelles x et y définie par $u(x,y) = (F\circ r)(x,y)$ o $r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ et F est une fonction réelle d'une variable réelle.
On pose : $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

a Calculer : $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}$. En dduire que $\Delta u = F''(r) + \frac{F'(r)}{r}$.

b En déduire Δu lorsque $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$.

Exo 9

$\mathcal{C}^1$-difféomorphismes.

① a Montrer que $f(x,y) = (x+y, xy)$ induit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V où U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ à préciser.

b Chercher l'expression de f^{-1} et vérifier que le produit des matrices jacobiennes est gal I.

② Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (e^{2y}+e^{2z}, e^{2x}-e^{2z}, x-y). \end{array}$
Montrer que f induit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur un ouvert à préciser.

Exo 10

Fonctions harmoniques.

Une fonction f réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U est dite harmonique si elle vérifie l'EDP suivantes : $\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2} = 0$, i.e. $\Delta f = 0$.

① **Les polynômes complexes sont harmoniques** .
Soient $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer que la fonction complexe f définie par $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,y) & \longmapsto & P(x+iy). \end{array}$ est harmonique.

② Soit $f \quad :] -1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On considère $g : \begin{array}{ccc} D\subset\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} y}\right). \end{array}$
déterminer f pour que g soit harmonique.

③ Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $u = x^2-y^2$, $v = 2xy$.
Soit $F \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & F(u,v) \end{array}$ et f définie par : $f(x,y) = F(u,v)$.
Montrer que F harmonique entraîne que f est harmonique.

Exo 11

Matrice Hessienne et changement de variables affine.

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application affine.

① Montrer que la matrice jacobienne, J, de φ est constante.

② Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on note
$H_f(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(a,b) \end{pmatrix}$ matrice Hessienne de f au point (a,b).
Montrer que : $H_{f\circ\varphi}(a,b)) = {}^t J . H_f(\varphi(a,b)).J$

Exo 12

Contre-exemples au théorème de Schwarz.

① Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction π-périodique de classe $\mathcal{C}^2$.
On pose pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $g(x,y) = r^2 f(\theta)$ avec $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

a Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,y)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,0)$ en fonction de f.

b En déduire les valeurs de $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0)$.

c Construire un exemple précis (donner $g(x,y)$ en fonction de x et y) pour lequel ces deux drives sont distinctes.

② (Centrale MP 2003)
Soit $f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq 0$ et $f(0,0) = 0$.

a Étudier la continuité de f et de ses dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$.

b Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Exo 13

Inégalités de Taylor-Lagrange.

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ dont les dérivées secondes sont bornées : $\forall\, i,j,\ \forall\, A \in U,\ \left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A)\right| \leq M$.

① Montrer que : $\forall\, A, B \in U,\ \left|f(B) - f(A) - df_A(\overrightarrow{AB})\right| \leq \dfrac{M\|\overrightarrow{AB}\|_1^2}{2}$.

② Montrer que : $\forall\, A, B \in U,\ \left|f(B) - f(A) - df_C(\overrightarrow{AB})\right| \leq \dfrac{M\|\overrightarrow{AB}\|_1^2}{4}$ où C est le milieu de $[A,B]$.

Exo 14

Soient $a,b,c \in \mathbb{R}$ non tous nuls. On considère l'équation aux dérivées partielles :

$$(*) \quad a\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} + b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2} = 0$$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ distincts, fixés. On fait le changement de variable : $u = x + \alpha y$, $v = x + \beta y$.

① Écrire l'équation déduite de $(*)$ par ce changement de variable.

② En déduire que l'on peut ramener $(*)$ à l'une des trois formes réduites :

$$(1) : \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0, \qquad (2) : \frac{\partial^2 g}{(\partial u)^2} = 0, \qquad (3) : \frac{\partial^2 g}{(\partial u)^2} + \frac{\partial^2 g}{(\partial v)^2} = 0.$$

Étude des extremums.

Exo 15

Chercher les extremums des fonctions $f(x,y)$ suivantes :

① $3xy - x^3 - y^3$
② $-2(x-y)^2 + x^4 + y^4$
③ $x^2y^2(1+3x+2y)$
④ $2x + y - x^4 - y^4$
⑤ $\dfrac{xy}{(x+y)(1+x)(1+y)}$, $x,y \geq$ 0
⑥ $xe^y + ye^x$
⑦ $x(\ln^2 x + y^2)$, $x > 0$
⑧ $\sqrt{x^2+(1-y)^2} + \sqrt{y^2+(1-x)^2}$

Exo 16

Pour $x > 0$ on pose $g(x) = \ln(x) + 2x + 1$.

1. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution $a \in]0, \frac{1}{e}[$.
2. Sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ on pose $f(x,y) = x(\ln(x) + x + y^2)$ déterminer le point critique.
3. Vérifier que f admet un minimum relatif en ce point et que : $\min f = -a(a+1)$.

Exo 17

Soit $\lambda > 1$, on pose $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x > 0\}$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x > 0, y \neq 0\}$, on se propose d'étudier les extremums de la fonction $f(x,y) = x^\lambda y - y^2 - y\ln(x+1) + 1$.

1. Pour $x > 0$ on pose $h(x) = x^\lambda - \ln(x+1)$, montrer que l'équation $h'(x) = 0$ admet une seule solution $b \in]0, +\infty[$.
2. On pose $h(b) = 2c$, montrer que $c < 0$.
3. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une seule solution $a \in]0, +\infty[$ et que $a > b$.
4. Déterminer les points critiques de f, (on les exprimera en fonction de a, b, c)
5. Montrer que f admet un seul extremum, que l'on précisera.

Exo 18

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

① Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes : $g_1(x,y) = f(y,x)$, $g_3(x,y) = f(y, f(x,x))$.

② Calculer les dérivées des fonctions suivantes : $h_1(x) = f(x,x)$, $h_2(x) = f(x, f(x,x))$

③ Calculer les dérivées des fonctions suivantes :
$h_1(x) = f(u(x), v(x))$, $h_2(x) = f(u(x), f(v(x), w(x)))$ où u, v, w trois fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exo 19

Aire maximal d'un triangle.

Soit ABC un triangle de cotés a, b, c.

① Calculer l'aire, S, de ABC en fonction de a, b, c.

② Montrer que $\dfrac{S}{a^2+b^2+c^2}$ est maximal lorsque ABC est équilatral.

Exo 20

Loi de réfraction.

Soient dans $\mathbb{R}^2$: $A = (a, 0)$, $B = (b, -c)$ et $M = (x, 0)$ $(a, b, c > 0)$. Un rayon lumineux parcourt la ligne brisée AMB à la vitesse v_1 de AM et v_2 de MB.

On note $\alpha_1 = (\widehat{\vec{j}, \overrightarrow{MA}})$ $\alpha_2 = (\widehat{-\vec{j}, \overrightarrow{MB}})$.

① Faire une figure.

② Montrer que le temps de parcours est minimal lorsque $\dfrac{\sin\alpha_1}{v_1} = \dfrac{\sin\alpha_2}{v_2}$.

Exo 21

Distances aux sommets d'un triangle.

Soit $A \in \mathbb{R}^p$ fixé, $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & AM^2 \end{array}$ et g $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$ (distance euclidienne)

① Calculer les gradients de f et g en un point M.

② Soient A, B, C trois points non alignés du plan. Trouver les points M du plan réalisant le minimum de :

a $MA^2 + MB^2 + MC^2$.

b $MA + MB + MC$.

c $MA.MB.MC$.

Applications du théorème des fonctions implicites.

Exo 22

① On considère la courbe d'équation $e^{x-y} = 1 + 2x + y$. Donner la tangente cette courbe et la position par rapport la tangente au point $(0,0)$.

② Montrer que l'équation : $x^3 + y^3 - 3xy = 1$ définit au voisinage de 0 une fonction implicite : $y = \varphi(x)$ telle que $\varphi(0) = 1$.
Donner le DL de φ en 0 l'ordre 3.

③ Montrer que l'égalité $2e^{x+y} + y - x = 0$ définit $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(1,-1)$.
Calculer $\varphi'(1)$ et $\varphi''(1)$.

④ Soit $f(x,y) = x\ln x - y\ln y,\ x,y > 0$.
Pour $k \in \mathbb{R}$, on considère la courbe γ_k d'équation $f(x,y) = k$.

a Suivant la position de $(a,b) \in \gamma_k$, préciser l'orientation de la tangente γ_k en (a,b).

b Dresser le tableau de variations de $\phi(t) = t\ln t$.

c Dessiner γ_0. (Étudier en particulier les points $(0,1),(1,0)$ et $\left(\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$ à l'aide de DL)

d Indiquer l'allure générale des courbes γ_k suivant le signe de k.

⑤ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de .

a Montrer que, sous une condition préciser, l'équation $y - zx = f(z)$ définit localement z fonction implicite de x et y.

b Montrer que l'on a alors : $\dfrac{\partial z}{\partial x} + z\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Fin

Á la prochaine