Série 6 Coniques & Quadriques

Blague du jour

Un petit garçon rentre de l'école avec son bulletin de note et va voir son père :
- Papa c'est vrai que tes lunettes grossisse tout ? lui demande-t-il.
- Bien-sûr pourquoi ?
- Alors mets les avant de regarder mon bulletin de note !

Johannes Kepler (1571-1630) — Mathématicien du jour

Mathématicien, philosophe de la nature, astrologue et astronome allemand célèbre pour avoir étudié l'hypothèse héliocentrique (*la Terre tourne autour du Soleil*) de Nicolas Copernic, et surtout pour avoir découvert que les plantes ne tournent pas en cercle parfait autour du Soleil mais en suivant des ellipses.

Suite : Il a découvert les relations mathématiques (dites Lois de Kepler) qui régissent les mouvements des plantes sur leur orbite. Ces relations furent plus tard exploitées par Isaac Newton pour élaborer la théorie de la gravitation universelle. Toutefois, Kepler expliquait les mouvements des plantes non pas par la gravité mais par le magnétisme. Il a enfin accordé une attention majeure à l'optique en étudiant par exemple la nature de la lumière, la chambre obscure, les miroirs (plans et courbes), les lentilles ou la réfraction.

Coniques

Exo 1

Déterminer la nature et les éléments de la courbe d'équation dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ orthonormé :

① $x^2+y^2+2xy-x+y-1=0$.

② $x^2+2y^2-3xy+2x-3y+1=0$.

③ $16x^2-24xy+9y^2+35x-20y=0$.

④ $5x^2+7y^2+2xy\sqrt{3}-(10+2\sqrt{3})x-(14+2\sqrt{3})y-4+2\sqrt{3}=0$.

⑤ $x^2+xy+y^2=1$.

⑥ $x^2+2y^2+4xy\sqrt{3}+x+y\sqrt{3}+1=0$.

⑦ $mx^2+4mx+(m-1)y^2+2=0$ $(m\in\mathbb{R})$.

⑧ $x^2+4xy+6y^2-a^2$. $(a\in\mathbb{R})$.

Exo 2

Montrer que le support de la courbe paramétrée : $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\cos t+\sin t\end{cases}$ est une ellipse, et en préciser les éléments caractéristiques.

Exo 3

Soit $\mathcal{C}$ une conique de foyer F, directrice D, excentricité e. On considère deux points de $\mathcal{C}$, $M\neq M'$ alignés avec F. Montrer que les tangentes $\mathcal{C}$ en M et M' se coupent sur D ou sont parallèles.

Indication : *Donner l'équation cartésienne de la coniques ainsi que de ses tangentes dans un repère orthonormé dont l'axe des ordonnés est parallèle à la directrice.*

Exo 4

Soit $\mathcal{P}$ une parabole de paramètre p et $A\in\mathcal{P}$. Soit B le point où la normale $\mathcal{P}$ en A recoupe $\mathcal{P}$. Déterminer la longueur minimale de AB.

Indication : *Utiliser le paramétrage de la parabole pour exprimer cette longueur à l'aide d'une fonction à deux variables.*

Exo 5 **Oral Centrale.**

On considère une parabole d'équation $y^2 = 2px$ dans un repère orthonormé dans le plan euclidien.

① .

a Exprimer l'équation d'une droite passant par deux points $A(x_A, a)$ et $B(x_B, b)$ de la parabole l'aide d'un déterminant d'ordre 3.

b Soient $A(x_A, a)$, $B(x_B, b)$ et $C(x_C, c)$ trois points sur la parabole,montrer que (AB) et (AC) sont perpendiculaires si et seulement si $a^2 + ab + ac + bc + 1 = 0$.

c On fixe A sur la parabole, B et C sont deux points de la parabole variables tels que (AB) et (AC) sont perpendiculaires. Montrer que (BC) passe par un point fixe M.

d Quel est le lieu de M quand A varie ?

② Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point fixe de la parabole.

a Discuter l'existence et le nombre de points $M \in \mathcal{P}$ distincts de M_0 tels que la normale $\mathcal{P}$ en M passe par M_0.

b Dans le cas où il y a deux solutions, M_1 et M_2, trouver le lieu géométrique du centre de gravité du triangle $(M_0M_1M_2)$.

Exo 6 **Tangentes à une ellipse**

Soient $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{4a^2} + \dfrac{y^2}{4b^2} = 1$, et $\mathcal{E}' : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

① Montrer qu'une CNS sur u, v, w pour que la droite d'équation $ux + vy + w = 0$ soit tangente $\mathcal{E}'$ est $a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0$.

② Soient (MP), (MQ) deux tangentes $\mathcal{E}'$ avec $M, P, Q \in \mathcal{E}$. Montrer que (PQ) est aussi tangente $\mathcal{E}$.

Exo 7 **Courbe orthoptique.**

① Quel est l'ensemble des points d'où l'on peut mener deux tangentes orthogonales à la conique d'équation $x^2 + 4xy + 6y^2 - a^2$. $(a \in \mathbb{R})$.

② Que signifie le vocabulaire courbe orthoptique.

Exo 8

Soient P un point mobile sur Ox, et Q un point mobile sur Oy tels que PQ reste constante.

① Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer le lieu, $\mathcal{C}_\alpha$, de $\mathrm{Bar}(P(1-\alpha), Q(\alpha))$.

② Soit R le quatrième point du rectangle $OPQR$. Démontrer que la tangente $\mathcal{C}_\alpha$ en un point M est perpendiculaire (RM).

Exo 9

Reconnaître l'ensemble $\mathcal{H}$ des points M du plan d'où l'on peut mener deux tangentes à la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y^2 = 2px$ telles que le segment joignant les deux points de contact soit vu du foyer sous un angle droit.

Quadriques.

Exo 10

Déterminer les natures des surfaces d'équation :

① $z - xy = 1$.

② $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 3x - y + z + 1 = 0$.

③ $(x-y)(y-z) + (y-z)(z-x) + (z-x)(x-y) + (x-y) = 0$.

④ $x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 6xy - 12yz + 4zx + 4 = 0$.

⑤ $x^2 - 2y^2 - z^2 + 2xz - 4yz + 3 = 0$.

⑥ $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - 2yz + 4x - 2y - z + 3 = 0$.

⑦ $xy + xz + yz + 1 = 0$.

⑧ $2x^2 + 2y^2 - z^2 + 5xy - yz + xz = 0$.

⑨ $xy + yz = 1$.

⑩ $x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 4xy - 2x + 4y = 0$.

On fera le minimum de calculs nécessaires pour pouvoir conclure.

Exo 11

Soit Q la courbe d'équations : $\begin{cases} x^2 - y^2 - 4x + 2 = 0 \\ x + z = 1. \end{cases}$.
Déterminer la nature et les éléments remarquables de Q.

Exo 12

Soit $\mathcal{E}$ la surface d'équation $x^2 + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{3z^2}{4} + xz = 1$. Montrer que $\mathcal{S}$ est un ellipsoïde et en calculer le volume intérieur.

Exo 13

Plan tangent à un ellipsoïde

Soit $\mathcal{E}$ un ellipsoïde d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ et P un plan d'équation $ux + vy + wz = 1$. Montrer que P est tangent E si et seulement si $a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 = 1$.

Exo 14

Points équidistants de deux droites.

Soient D, D' deux droites non coplanaires et $\mathcal{S}$ l'ensemble des points équidistants de D et D'. Montrer que $\mathcal{S}$ est un paraboloïde hyperbolique. (Utiliser un repère judicieux)

Exo 15

Montrer que la surface $\mathcal{C}$ d'équation $xy + yz = 1$, donner en une directrice et la direction de ses génératrices.

Exo 16

Déterminer une équation cartésienne du cône $\mathcal{C}$ de sommet $S(1,1,1)$ et de directrice γ : $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$.

Fin

Fin

Á la prochaine

✉ : mamouni.myismail@gmail.com
مَموني مولاي اسماعيل