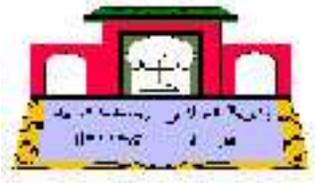


CPGE My Youssef, Rabat



Feuille d'exercices: *Coniques* *Quadriques*

3 janvier 2010

Blague du jour :

Un petit garçon rentre de l'école avec son bulletin de note et va voir son père :

- Papa c'est vrai que tes lunettes grossisse tout ? lui demande-t-il.
- Bien-sûr pourquoi ?
- Alors mets les avant de regarder mon bulletin de note !



Mathématicien du jour

Johannes Kepler (1571-1630), est mathématicien, philosophe de la nature, astrologue et astronome allemand célèbre pour avoir étudié l'hypothèse héliocentrique (*la Terre tourne autour du Soleil*) de Nicolas Copernic, et surtout pour avoir découvert que les planètes ne tournent pas en cercle parfait autour du Soleil mais en suivant des ellipses.

Il a découvert les relations mathématiques (dites Lois de Kepler) qui régissent les mouvements des planètes sur leur orbite. Ces relations furent plus tard exploitées par Isaac Newton pour élaborer la théorie de la gravitation universelle. Toutefois, Kepler expliquait les mouvements des planètes non pas par la gravité mais par le magnétisme.

Il a enfin accordé une attention majeure à l'optique en étudiant par exemple la nature de la lumière, la chambre obscure, les miroirs (plans et courbes), les lentilles ou la réfraction.

Laplace

Remerciements : Pour Michel Quercia (Paris) pour les fichiers sources en latex.

1 Coniques.

Exercice 1 . Déterminer la nature et les éléments de la courbe d'équation dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) orthonormé :

- 1) $x^2 + y^2 + 2xy - x + y - 1 = 0.$
- 2) $x^2 + 2y^2 - 3xy + 2x - 3y + 1 = 0.$
- 3) $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 35x - 20y = 0.$
- 4) $5x^2 + 7y^2 + 2xy\sqrt{3} - (10 + 2\sqrt{3})x - (14 + 2\sqrt{3})y - 4 + 2\sqrt{3} = 0.$
- 5) $x^2 + xy + y^2 = 1.$
- 6) $x^2 + 2y^2 + 4xy\sqrt{3} + x + y\sqrt{3} + 1 = 0.$
- 7) $mx^2 + 4mx + (m - 1)y^2 + 2 = 0$ ($m \in \mathbb{R}$).
- 8) $x^2 + 4xy + 6y^2 - a^2. (a \in \mathbb{R}).$

Exercice 2 . Montrer que le support de la courbe paramétrée : $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos t + \sin t \end{cases}$ est une ellipse, et en préciser les éléments caractéristiques.

Exercice 3 . Soit \mathcal{C} une conique de foyer F , directrice D , excentricité e . On considère deux points de \mathcal{C} , $M \neq M'$ alignés avec F . Montrer que les tangentes \mathcal{C} en M et M' se coupent sur D ou sont parallèles.

Indication : Donner l'équation cartésienne de la coniques ainsi que de ses tangentes dans un repère orthonormé dont l'axe des ordonnés est parallèle à la directrice.

Exercice 4 . Soit \mathcal{P} une parabole de paramètre p et $A \in \mathcal{P}$. Soit B le point où la normale \mathcal{P} en A recoupe \mathcal{P} . Déterminer la longueur minimale de AB .

Indication : Utiliser le paramétrage de la parabole pour exprimer cette longueur à l'aide d'une fonction à deux variables.

Exercice 5 . Oral Centrale.

On considère une parabole d'équation $y^2 = 2px$ dans un repère orthonormé dans le plan euclidien.

- 1) .
 - a) Exprimer l'équation d'une droite passant par deux points $A(x_A, a)$ et $B(x_B, b)$ de la parabole l'aide d'un déterminant d'ordre 3.
 - b) Soient $A(x_A, a)$, $B(x_B, b)$ et $C(x_C, c)$ trois points sur la parabole, montrer que (AB) et (AC) sont perpendiculaires si et seulement si $a^2 + ab + ac + bc + 1 = 0$.
 - c) On fixe A sur la parabole, B et C sont deux points de la parabole variables tels que (AB) et (AC) sont perpendiculaires. Montrer que (BC) passe par un point fixe M .
 - d) Quel est le lieu de M quand A varie ?
- 2) Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point fixe de la parabole.
 - a) Discuter l'existence et le nombre de points $M \in \mathcal{P}$ distincts de M_0 tels que la normale \mathcal{P} en M passe par M_0 .
 - b) Dans le cas où il y a deux solutions, M_1 et M_2 , trouver le lieu géométrique du centre de gravité du triangle $(M_0M_1M_2)$.

Exercice 6 . Tangentes à une ellipse

Soient $\mathcal{E} : \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1$, et $\mathcal{E}' : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

- 1) Montrer qu'une CNS sur u, v, w pour que la droite d'équation $ux + vy + w = 0$ soit tangente \mathcal{E}' est $a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0$.
- 2) Soient (MP) , (MQ) deux tangentes \mathcal{E}' avec $M, P, Q \in \mathcal{E}$. Montrer que (PQ) est aussi tangente \mathcal{E} .

Exercice 7 . Courbe orthoptique.

- 1) Quel est l'ensemble des points d'où l'on peut mener deux tangentes orthogonales à la conique d'équation $x^2 + 4xy + 6y^2 - a^2$. ($a \in \mathbb{R}$).
- 2) Que signifie le vocabulaire courbe orthoptique.

Exercice 8 . Soient P un point mobile sur Ox , et Q un point mobile sur Oy tels que PQ reste constante.

- 1) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer le lieu, \mathcal{C}_α , de $\text{Bar}(P(1 - \alpha), Q(\alpha))$.
- 2) Soit R le quatrième point du rectangle $OPQR$. Démontrer que la tangente \mathcal{C}_α en un point M est perpendiculaire (RM) .

Exercice 9 . Reconnaître l'ensemble \mathcal{H} des points M du plan d'où l'on peut mener deux tangentes à la parabole \mathcal{P} d'équation $y^2 = 2px$ telles que le segment joignant les deux points de contact soit vu du foyer sous un angle droit.

2 Quadriques.

Exercice 10 . Déterminer les natures des surfaces d'équation :

- 1) $z - xy = 1.$
- 2) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 3x - y + z + 1 = 0.$
- 3) $(x - y)(y - z) + (y - z)(z - x) + (z - x)(x - y) + (x - y) = 0.$
- 4) $x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 6xy - 12yz + 4zx + 4 = 0.$
- 5) $x^2 - 2y^2 - z^2 + 2xz - 4yz + 3 = 0.$
- 6) $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - 2yz + 4x - 2y - z + 3 = 0.$
- 7) $xy + xz + yz + 1 = 0.$
- 8) $2x^2 + 2y^2 - z^2 + 5xy - yz + xz = 0.$
- 9) $xy + yz = 1.$
- 10) $x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 4xy - 2x + 4y = 0.$

On fera le minimum de calculs nécessaires pour pouvoir conclure.

Exercice 11 . Soit \mathcal{Q} la courbe d'équations :
$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 4x + 2 = 0 \\ x + z = 1. \end{cases}$$

Déterminer la nature et les éléments remarquables de \mathcal{Q} .

Exercice 12 . Soit \mathcal{E} la surface d'équation $x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{3z^2}{4} + xz = 1$. Montrer que S est un ellipsoïde et en calculer le volume intérieur.

Exercice 13 . Plan tangent à un ellipsoïde

Soit \mathcal{E} un ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ et P un plan d'équation $ux + vy + wz = 1$. Montrer que P est tangent à \mathcal{E} si et seulement si $a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 = 1$.

Exercice 14 . Points équidistants de deux droites.

Soient D, D' deux droites non coplanaires et S l'ensemble des points équidistants de D et D' . Montrer que S est un parabolode hyperbolique. (Utiliser un repère judicieux)

Exercice 15 . Montrer que la surface \mathcal{C} d'équation $xy + yz = 1$, donner en une directrice et la direction de ses génératrices.

Exercice 16 . Déterminer une équation cartésienne du cône \mathcal{C} de sommet $S(1, 1, 1)$ et de directrice $\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$.

Fin
À la prochaine