Série 8 Courbes & Surfaces

Blague du jour

- Avec Windows XP, on était au bord du ravin.
Avec Windows Vista, on a fait un grand pas en avant
- La nouvelle version de Windows 7 est presque terminée, il ne reste plus qu'à y incorporer les erreurs.

Frenet-Serret

Mathématicien du jour

- Jean Frédéric Frenet (1816-1900) était un mathématicien, astronome et météorologue français. Il est connu pour avoir découvert (indépendamment) les formules de Serret-Frenet. Il fait ses études à l'École Normale Supérieure.
- Joseph Serret (1819-1885) (photo ci-dessus) est un mathématicien et astronome français, spécialement connu pour les formules de géométrie différentielle associées au trièdre de Serret-Frenet. Polytechnicien en 1840.

Courbes.

Courbes planes.

Exo 1

On considère les deux ellipses : $(\xi) : \dfrac{x^2}{4a^2} + \dfrac{y^2}{4b^2} = 1$

$(\xi') : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

① A quelle condition une droite d'ééquation : $ux + vy + w = 0$ est tangente (ξ')

② Pour tout point M de (ξ) on mène les deux tangentes a (ξ') qui recoupent (ξ) en P et Q montrer que la droite (PQ) est tangente (ξ') Utiliser les coordonnées polaires)

Exo 2

Déterminer les courbes pour lesquelles $\widehat{MOC} = \dfrac{\pi}{2}$ tel que C centre de courbure de la courbe au point M

Exo 3

Soit D_α la droite passant par O d'angle polaire $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

① Montrer que D_α recoupe (Γ) en deux points M_α, M'_α

② Calculer la longueur du segment $[M_\alpha, M'_\alpha]$

③ Déterminer le lieu H des milieux de $[M_\alpha, M'_\alpha]$ quand $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

④ En déduire une construction géomterique des points M_α, M'_α

Exo 4

Soit P la parabole d'ééquation : $y^2 = 2px$ $(p > 0)$

① Quel est l'ensemble (ξ) des points du plan par lesquels passent trois normales la parabole

② Quel est l'ensemble $(\xi') \subset (\xi)$ des points tel que deux parmi ces trois droites sont perpendiculaires

Exo 5

Soit (γ) la courbe de représentation paramétrique définie par :

$$\begin{cases} x(t) = a(1+\cos(t)) \\ y(t) = a\sin(t) \end{cases} \quad \text{tel que } a > 0$$

① Reconnaitre la nature géometrique de (γ)

② Soit (Γ) l'ensemble des projections orthogonales de O sur la tangentes a (γ). Donner une repésentation paramétrique de (Γ) .

③ En déduire une ééquation polaire de (Γ)

④ Soit M un point de (Γ) d'angle polaire θ, $\overrightarrow{\tau}$ le vecteur unitaire tangent en M à (Γ) orienté dans le sens des θ croissants,exprimer l'angle $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{\tau}\right)$
En déduire les poins de (Γ) où la tangente est verticale ou horizontale

Exo 6

Soit (γ) arc géométrique plan tel que : $\forall M \in (\gamma)$ on a : l'angle $\widehat{MOC}$ est droit où C est le centre de courbure de (γ) au point M

① Si α désigne l'ange entre l'axe (Ox) et la tangente à (γ) au point M montrer que :

$$x^2 + y^2 = \left(x\frac{dy}{d\alpha} - y\frac{dx}{d\alpha}\right)$$

② Si θ désigne l'ange entre la droite (OM) et l'axe (Ox). Montrer que : $\dfrac{d\theta}{da} = 1$
On pourra utiliser les coordonnées polaires avec $r = OM$.

③ Soit β l'angle entre la droite (OM) et la tangente a (γ) au point M, justifiez que $\tan(\beta) = \dfrac{r}{r'}$.

④ En déduire que (γ) est une spirale.

Exo 7

Soit (γ) l'arc géométrique plan définie par l'éequation polaire :

$$r(\theta) = \sin^n\left(\frac{\theta}{n}\right) \quad \text{tel que } n \in \mathbb{N}^*, 0 < \theta < n\pi$$

① calculer $||\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}||$.

② En déduire que si β est l'angle entre la droite (OM) et la tangente (γ) au point M alors : $\beta = \dfrac{\theta}{n}$.

③ En déduire l'angle α entre l'axe (Ox) et la tangente (γ) au point M, puis R le rayon de courbure.

④ Soit $M'e$ la projection orthogonale de C, centre de courbure de (γ) au point M, sur la droite (OM), montrer que M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{n+1}$

Exo 8

Construire les courbes d'éequation polaire :

① $\rho(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta) - 1}$

② $\rho(\theta) = 1 + \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

③ $\rho(\theta) = \theta\sin(\theta)$

④ $\rho(\theta) = 4\cos(\theta)\cos(2\theta)$

⑤ $\rho(\theta) = 2\cos(\theta) - \cos(2\theta)$

⑥ $\rho(\theta) = 1 - \tan(2\theta)$

Exo 9

Soit (γ) la courbe de représentation paramétrique définie par :

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{\cos(t)} \\ y(t) = \sqrt{\sin(t)} \end{cases} \quad \text{tel que } t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

Quels sont les points pour lesquels le centre de courbure coïncide avec l'origine

Exo 10

Soit (γ) courbe plane parametrée de classe C^3, (γ_1) l'ensemble des points, C centres de courbure de (γ), et (γ_2) l'ensemble des milieux I des segments $[M, C_1]$
Montrer que la tangente (γ_2) au point I est orthogonal $\overrightarrow{MC_1}$

Exo 11 Soit (γ) une courbe plane parametrée de classe $\mathcal{C}^1$, tout point M de (γ) on associé H la projection orthogonale de O sur la tangente en M (γ), et soit (γ_1) l'ensemble de ces projections.
Montrer que la normale (γ_1) au point H passe par le milieu de $[O, M]$

Exo 12 Déterminer les coordonnées du centre de courbure au point M pour les courbes suivantes :

① Cycloïde : $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$.

② Astéroïde : $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$.

③ Hyperbole : $xy = 1$.

④ Ellipse : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

⑤ Spirale : $\rho = e^{\theta}$.

⑥ Cardioïde : $\rho = 1 + \cos\theta$.

Courbes gauches.

Exo 13 On considère la courbe γ définie par :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^4}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2} \\ z(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

On suppose qu'ils existent quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 de γ de paramètres respectifs t_1, t_2, t_3, t_4 qui sont coplanaires. Soit le plan P d'équation $ax + by + cz - d = 0$ passe par ces points.

① Montrer que t_1, t_2, t_3, t_4 sont les racines (distinctes) du polynôme $at^4 + bt^3 + ct^2 - d$.

② En déduire que $t_1t_2t_3 + t_1t_2t_4 + t_1t_3t_4 + t_2t_3t_4 = 0$

③ En déduire que $\dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_2} + \dfrac{1}{t_3} + \dfrac{1}{t_4} = 0$ si aucun des t_i n'est nul.

Exo 14 Soit γ une courbe de l'espace, et γ_1 la courbe décrite par le centre de courbure, I, en un point M de γ. On suppose que la courbure de γ est constante et sa torsion non nulle. On note par τ, τ_1, c, c_1 les torsions et courbure respectives de γ et γ_1. $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ et $(\vec{T_1}, \vec{N_1}, \vec{B_1})$ les repères de Serret-Frenet associés respectivement à γ et γ_1 et enfin s et s_1 les abscisses curvilignes relatives aux deux courbes γ et γ_1

① Justifier les formules suivantes;
$\dfrac{d\vec{I}}{ds} = -\dfrac{\tau}{c}\vec{B},\ \vec{T_1} = \vec{B},\ \dfrac{ds_1}{ds} = -\dfrac{\tau}{c},\ \vec{N_1} = -\vec{N}$

② En déduire que que la courbure de γ_1 est aussi constante, préciser cette constante.

③ En déduire que $\tau_1 = -\dfrac{c^2}{\tau}$.

Surfaces.

Exo 15 Soient $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ les surfaces d'équations $x^2 + y^2 + xy = 1$ et $y^2 + z^2 + yz = 1$, et $\gamma = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$.

① Donner en tout point de γ le vecteur tangent..

② Montrer que tout point $M(x, y, z)$ de γ vérifie $(x - z)(x + y + z) = 0$.

③ En déduire que γ est la réunion de deux courbes planes.

④ Quelle est la projection de γ sur Oxz ?

Exo 16 Soit γ le cercle intersection de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et du plan d'équation $x + y = 1$, et $S = (1, 1, 1)$. Déterminer l'équation cartésienne du cône Σ de sommet S s'appuyant sur γ.

Réponse : $\forall M \in \Sigma\ \exists t \in \mathbb{R}, \exists P \in \gamma$ tel que $\overrightarrow{SP} = t\overrightarrow{MP}$, on trouve alors : $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 2yz + 2z = 1$.

Exo 17

Soit (Γ) : $\begin{cases} x(t) = a\cos(t)/\cosh(mt) \\ y(t) = a\sin(t)/\cosh(mt) \\ z(t) = a\tanh(mt). \end{cases}$

① Montrer que (Γ) est tracée sur (Σ), la surface de révolution autour de Oz et d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

② Donner un paramétrage de Σ : $(u,v) \mapsto M(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

③ Montrer que la tangente à la méridienne passant par $M(u,v)$ est dirigée par $\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial v}$ et la tangente (Γ) passant par $M(t,mt)$ est dirige par $\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial u} + m\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial v}$.

④ Vérifier que le cosinus de ces deux vecteurs est constant.

⑤ En déduire que (Γ) coupe les méridiennes de (Σ) suivant un angle constant (loxodromie).

⑥ Réciproquement, soit une loxodromie de (Σ) : une courbe $\gamma = \{u(t), v(t),\ t \in I\}$ tracée sur (Σ) tel que le cosinus de l'angle entre cette courbe et une méridienne de (Σ).

a Montrer que ce cosinus vaut : $\dfrac{u'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}$.

b En déduire que $\dfrac{v'}{u'} = m$ est constant.

c En prenant $u(t) = t$, en déduire que γ est déduite de (Γ) par rotation autour de Oz.

d Donner l'équation polaire de la projection de (Γ) sur xOy, dessiner cette projection.

Exo 18

Soit γ la courbe d'équations dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 4x + 2 &= 0 \\ x + z &= 1. \end{cases}$$

et Σ la surface engendrée par la rotation de (Γ) autour de Oz.

① Dire pourquoi γ est un courbe plane, préciser sa nature.

② Pour $M(x,y,z) \in \Gamma$, on pose $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Montrer que $2z^2 = r^2$.

③ En déduire que Γ est incluse dans l'hyperboloïde de révolution d'équation $2z^2 = x^2 + y^2$.

④ Conclure que cette hyperboloïde de révolution n'est autre que Σ.

Á la prochaine