XM6-CPGE My Youssef

Feuille d'exercices

Courbes et Surfaces

Rabat le 28 mars 2010

Blague du jour :
Cinq ingénieurs et cinq commerciaux se déplacent pour aller à un salon. Chacun des 5 commerciaux va acheter un billet de train. Les ingénieurs n'achètent qu'UN seul billet. Les 5 ingénieurs vont s'enfermer dans les toilettes juste avant que le contrôleur n'arrive. En passant, le contrôleur voit que les toilettes sont occupées. Il frappe à la porte et demande "Votre billet, s'il vous plaît !". Les ingénieurs glissent LE billet sous la porte. Le contrôleur est satisfait et s'en va. Les commerciaux sont bien sûr extrêmement vexés que les ingénieurs leur ont encore une fois fait la leçon. Pour le retour, les 5 commerciaux achètent UN seul billet. Quant aux ingénieurs, ils n'achètent AUCUN billet. Les 5 commerciaux vont s'enfermer dans les toilettes juste avant que le contrôleur n'arrive. Les ingénieurs passent discrètement à côté, frappent à la porte et demandent "Votre billet, s'il vous plaît !" et se réfugient dans les toilettes suivantes..... La morale de l'histoire : les commerciaux essayent toujours d'appliquer les techniques des ingénieurs sans jamais vraiment les comprendre.

Mathématiciens du jour **Frenet-Serret**
• Jean Frédéric Frenet (1816-1900) était un mathématicien, astronome et météorologue français. Il est connu pour avoir découvert (indépendamment) les formules de Serret-Frenet. Il fait ses études à l'École Normale Supérieure.
• Joseph Serret (1819-1885) (photo ci-dessus) est un mathématicien et astronome français, spécialement connu pour les formules de géométrie différentielle associées au trièdre de Serret-Frenet. Polytechnicien en 1840.

1 Courbes.

1.1 Courbes planes.

Exo 1

On considère les deux ellipses : $(\xi) : \dfrac{x^2}{4a^2} + \dfrac{y^2}{4b^2} = 1$

$(\xi') : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

1) A quelle condition une droite d'éequation : $ux + vy + w = 0$ est tangente (ξ')

2) Pour tout point M de (ξ) on mène les deux tangentes a (ξ') qui recoupent (ξ) en P et Q montrer que la droite (PQ) est tangente (ξ')
Utiliser les coordonnées polaires)

Exo 2

Soit D_α la droite passant par O d'angle polaire $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

1) Montrer que D_α recoupe (Γ) en deux points M_α, M'_α

2) Calculer la longueur du segment $[M_\alpha, M'_\alpha]$

3) Déterminer le lieu H des milieux de $[M_\alpha, M'_\alpha]$ quand $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

4) En déduire une construction géomterique des points M_α, M'_α

Exo 3

Soit P la parabole d'éequation : $y^2 = 2px$ $(p > 0)$

1) Quel est l'ensemble (ξ) des points du plan par lesquels passent trois normales la parabole

2) Quel est l'ensemble $(\xi') \subset (\xi)$ des points tel que deux parmi ces trois droites sont perpendiculaires

Exo 4

Soit (γ) la courbe de représentation paramétrique définie par :
$$\begin{cases} x(t) = a(1+\cos(t)) \\ y(t) = a\sin(t) \end{cases} \quad \text{tel que } a > 0$$

1) Reconnaitre la nature géometrique de (γ)
2) Soit (Γ) l'ensemble des projections orthogonales de O sur la tangentes a (γ). Donner une repésentation paramétrique de (Γ).
3) En déduire une éequation polaire de (Γ)
4) Soit M un point de (Γ) d'angle polaire $\theta, \overrightarrow{\tau}$ le vecteur unitaire tangent en M à (Γ) orienté dans le sens des θ croissants,exprimer l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{\tau}}\right)$
En déduire les poins de (Γ) où la tangente est verticale ou horizontale

Exo 5

Soit (γ) arc géométrique plan tel que : $\forall M \in (\gamma)$ on a : l'angle $\widehat{MOC}$ est droit où C est le centre de courbure de (γ) au point M

1) Si α désigne l'ange entre l'axe (Ox) et la tangente à (γ) au point M montrer que : $x^2+y^2 = \left(x\dfrac{dy}{d\alpha} - y\dfrac{dx}{d\alpha}\right)$.
2) Si θ désigne l'ange entre la droite (OM) et l'axe (Ox). Montrer que : $\dfrac{d\theta}{d\alpha} = 1$
On pourra utiliser les coordonnes polaires avec $r = OM$.
3) Soit β l'angle entre la droite (OM) et la tangente a (γ) au point M, justifiez que $\tan(\beta) = \dfrac{r}{r'}$.
4) En déduire que (γ) est une spirale.

Exo 6

Soit (γ) l'arc géométrique plan définie par l'éequation polaire :
$$r(\theta) = \sin^n\left(\frac{\theta}{n}\right) \quad \text{tel que } n \in \mathbb{N}^*, 0 < \theta < n\pi$$

1) calculer $\|\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}\|$.
2) En déduire que si β est l'angle entre la droite (OM) et la tangente (γ) au point M alors : $\beta = \dfrac{\theta}{n}$.
3) En déduire l'angle α entre l'axe (Ox) et la tangente (γ) au point M, puis R le rayon de courbure.
4) Soit M'e la projection orthogonale de C, centre de courbure de (γ) au point M, sur la droite (OM), montrer que M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{n+1}$

Exo 7

Construire les courbes d'éequation polaire :

1) $\rho(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)-1}$
2) $\rho(\theta) = 1 + \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$
3) $\rho(\theta) = \theta\sin(\theta)$
4) $\rho(\theta) = 4\cos(\theta)\cos(2\theta)$
5) $\rho(\theta) = 2\cos(\theta) - \cos(2\theta)$
6) $\rho(\theta) = 1 - \tan(2\theta)$

Exo 8

Soit (γ) la courbe de représentation paramétrique définie par :
$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{\cos(t)} \\ y(t) = \sqrt{\sin(t)} \end{cases} \quad \text{tel que } t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$
Quels sont les points pour lesquels le centre de courbure coïncide avec l'origine

Exo 9

Déterminer les courbes pour lesquelles
$\widehat{MOC} = \dfrac{\pi}{2}$ tel que C centre de courbure de la courbe au point M

Exo 10

Soit (γ) courbe plane parametrée de classe $\mathcal{C}^3, (\gamma_1)$ l'ensemble des points, C centres de courbure de (γ), et (γ_2) l'ensemble des milieux I des segments $[M, C_1]$
Montrer que la tangente (γ_2) au point I est orthogonal $\overrightarrow{MC_1}$

Exo 11

Soit (γ) une courbe plane parametrée de classe $\mathcal{C}^1$, tout point M de (γ) on associé H la projection orthogonale de O sur la tangente en M (γ), et soit (γ_1) l'ensemble de ces projections.
Montrer que la normale (γ_1) au point H passe par le milieu de $[O, M]$

Exo 12

Déterminer les coordonnes du centre de courbure au point M pour les courbes suivantes :

1) Cycloïde : $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$.
2) Astéroïde : $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$.
3) Hyperbole : $xy = 1$.
4) Ellipse : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.
5) Spirale : $\rho = e^\theta$.
6) Cardioïde : $\rho = 1 + \cos\theta$.

1.2 Courbes gauches.

Exo 13

On considère la courbe γ définie par :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^4}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2} \\ z(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

On suppose qu'ils existent quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 de γ de paramètres respectifs t_1, t_2, t_3, t_4 qui sont coplanaires. Soit le plan P d'équation $ax+by+cz-d = 0$ passe par ces points.

1) Montrer que t_1, t_2, t_3, t_4 sont les racines (distinctes) du polynôme $at^4+bt^3+ct^2-d$.

2) En déduire que $t_1t_2t_3 + t_1t_2t_4 + t_1t_3t_4 + t_2t_3t_4 = 0$

3) En déduire que $\dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_2} + \dfrac{1}{t_3} + \dfrac{1}{t_4} = 0$ si aucun des t_i n'est nul.

Exo 14

Soit γ une courbe de l'espace, et γ_1 la courbe décrite par le centre de courbure, I, en un point M de γ. On suppose que la courbure de γ est constante et sa torsion non nulle. On note par τ, τ_1, c, c_1 les torsions et courbure respectives de γ et γ_1. $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ et $(\vec{T}_1, \vec{N}_1, \vec{B}_1)$ les repères de Serret-Frenet associés respectivement à γ et γ_1 et enfin s et s_1 les abscisses curvilignes relatives aux deux courbes γ et γ_1

1) Justifier les formules suivantes ;

$$\frac{d\vec{I}}{ds} = -\frac{\tau}{c}\vec{B},\ \vec{T}_1 = \vec{B},\ \frac{ds_1}{ds} = -\frac{\tau}{c},\ \vec{N}_1 = -\vec{N}$$

2) En déduire que que la courbure de γ_1 est aussi constante, préciser cette constante.

3) En déduire que $\tau_1 = -\dfrac{c^2}{\tau}$.

2 Surfaces.

Exo 15

Soit γ le cercle intersection de la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2 = 1$ et du plan d'équation $x+y = 1$, et $S = (1,1,1)$. Déterminer l'équation cartésienne du cône Σ de sommet S s'appuyant sur γ.

Indication: $\forall M \in \Sigma\ \exists t \in \mathbb{R}, \exists P \in \gamma$ tel que $\overrightarrow{SP} = t\overrightarrow{MP}$, on trouve alors : $x^2+y^2+z^2-2xz-2yz+2z = 1$.

Exo 16

Soit (Γ) : $\begin{cases} x(t) = a\cos(t)/\mathrm{ch}(mt) \\ y(t) = a\sin(t)/\mathrm{ch}(mt) \\ z(t) = a\,\mathrm{th}(mt). \end{cases}$

1) Montrer que (Γ) est tracée sur (Σ), la surface de révolution autour de Oz et d'équation : $x^2+y^2+z^2 = a^2$.

2) Donner un paramétrage de Σ : $(u,v) \mapsto M(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

3) Montrer que la tangente à la méridienne passant par $M(u,v)$ est dirigée par $\dfrac{\partial\vec{M}}{\partial v}$ et la tangente (Γ) passant par $M(t,mt)$ est dirige par $\dfrac{\partial\vec{M}}{\partial u} + m\dfrac{\partial\vec{M}}{\partial v}$.

4) Vérifier que le cosinus de ces deux vecteurs est constant.

5) En déduire que (Γ) coupe les méridiennes de (Σ) suivant un angle constant (loxodromie).

6) Réciproquement, soit une loxodromie de (Σ) : une courbe $\gamma = \{u(t), v(t),\ t \in I\}$ tracée sur (Σ) tel que le cosinus de l'angle entre cette courbe et une méridienne de (Σ).

a) Montrer que ce cosinus vaut : $\dfrac{u'}{\sqrt{u'^2+v'^2}}$.

b) En déduire que $\dfrac{v'}{u'} = m$ est constant.

c) En prenant $u(t) = t$, en déduire que γ est déduite de (Γ) par rotation autour de Oz.

7) Donner l'équation polaire de la projection de (Γ) sur xOy, dessiner cette projection.

Exo 17

Soit γ la courbe d'équations dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x^2-y^2-4x+2 &= 0 \\ x+z &= 1. \end{cases}$$

et Σ la surface engendrée par la rotation de (Γ) autour de Oz.

1) Dire pourquoi γ est un courbe plane, préciser sa nature.

2) Pour $M(x,y,z) \in \Gamma$, on pose $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Montrer que $2z^2 = r^2$.

3) En déduire que Γ est incluse dans l'hyperboloïde de révolution d'équation $2z^2 = x^2+y^2$.

4) Conclure que cette hyperboloïde de révolution n'est autre que Σ.

Exo 18 Soient $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ les surfaces d'équations $x^2+y^2+xy=1$ et $y^2+z^2+yz=1$, et $\gamma=\mathcal{S}_1\cap\mathcal{S}_2$.

1) Donner en tout point de γ le vecteur tangent..

2) Montrer que tout point $M(x,y,z)$ de γ vérifie $(x-z)(x+y+z)=0$.

3) En déduire que γ est la réunion de deux courbes planes.

4) Quelle est la projection de γ sur Oxz ?