CPGE My Youssef, Rabat

Feuille d'exercices: *Dualité en dimension finie*

26 novembre 2009

Blague du jour
• **Pourquoi le nombre zéro n'a-t-il aucune crédibilité au sein des nombres complexes ?**
Réponse : Parcequ'il n'a jamais d'argument.
• **Pourquoi,pour les Romains, les mathématiques ne sont pas vraiment intéressantes ?**
Réponse : Parceque X est toujours égal à 10.

Mathématicen du jour ***Gauss.***
Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) est un mathématicien, astronome et physicien allemand. Doté d'un grand génie, il est surnommé « le prince des mathématiciens », et considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.
Considéré par beaucoup comme distant et austère, Gauss ne travailla jamais comme professeur de mathématiques, détestait enseigner et collabora rarement avec d'autres mathématiciens.
Enfant prodige, il apprend seul à lire et à compter à l'âge de trois ans. À cet âge, il corrige son père qui s'est trompé dans une addition.
En mathématiques, trés jeune, il formule la méthode des moindres carrés et une conjecture sur la répartition des nombres premiers, conjecture qui sera prouvée un siècle plus tard. Il fait ensuite une grande percée, en caractérisant presque complètement tous les polygones réguliers constructibles à la règle et au compas uniquement. Satisfait de ce résultat, il demande qu'un polygone régulier de 17 côtés soit gravé sur son tombeau. En 1796 encore, il est le premier à démontrer rigoureusement le théorème de D'Alembert-Gauss, appelé théorème fondamental de l'algèbre.
En physique, il est à l'origine de la découverte des lois de Kirchhoff en électricité et l'auteur de deux des quatre équations de Maxwell. Il mène à la construction d'un télégraphe primitif.

Remerciements pour Michel Quercia du lycée Carnot de Dijon, pour la source latex de ces exercices.

1 Formes linéaires.

Exercice 1 . **Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire non identiquement nulle. On note $H = \ker f$.**

1) **Montrer que Im $f = \mathbb{K}$.**
2) **Soit $\vec{u} \in E \setminus H$ et $F = \text{vect}(\vec{u})$. Montrer que $F \oplus H = E$.**

Exercice 2 . ***Base antiduale.***
Soient $(f_i)_i$, n formes linéaires indépendantes sur un espace vectoriel E de dimension n. Montrer qu'il existe une base $(\vec{e}_i)$ de E telle que $f_i = \vec{e}_i^{\,*}$.
$(\vec{e}_i)_i$ s'appelle la base antiduale de $(f_i)_i$

Exercice 3 . Dans $\mathbb{K}^3$ on considère les formes linéaires : $\begin{array}{l} f_1(\vec{x}) = x + y - z \\ f_2(\vec{x}) = x - y + z \\ f_3(\vec{x}) = x + y + z \end{array}$ **.**

1) **Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $(\mathbb{K}^3)^*$.**
2) **Trouver sa base antiduale.**

Exercice 4 . Pour $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ on pose $f_i(\vec{x}) = x_i + x_{i+1}$, pour $1 \le i \le n-1$, et $f_n(\vec{x}) = x_n + x_1$.
Déterminer si $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ est une base de $(\mathbb{K}^n)^*$ et, le cas échéant, déterminer la base antiduale.

Exercice 5 . Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$ et $x_0, \dots, x_n$ sont des scalaires deux à deux distincts. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (f_0, \dots, f_n)$ est une base de E^* et donner la base antiduale lorsque : $f_i(P) = P(x_i),\ f_i(P) = P^{(i)}(0),\ f_i(P) = P^{(i)}(x_i)$.

Exercice 6 . Soit $E = \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts.
On note : $\phi_i : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(x_i) \end{array}$ **et** $\psi_i : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P'(x_i) \end{array}$

1) **Montrer que $(\phi_1, \dots, \phi_n, \psi_1, \dots, \psi_n)$ est une base de E^*.**
2) **Chercher la base antiduale. On notera $P_i = \displaystyle\prod_{j \ne i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$ et $d_i = P_i'(x_i)$.**

Exercice 7 . Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$ distincts. On considère les formes linéaires sur E : $f_a : P \longrightarrow P(a)$, $f_b : P \longrightarrow P(b)$

$f_c : P \longrightarrow P(c)$, $\varphi : P \longrightarrow \displaystyle\int_{t=a}^{b} P(t)\,\mathrm{d}t$

Montrer que $c \ne \dfrac{a+b}{2}$ est une CNS pour la liberté de (f_a, f_b, f_c, φ).

Exercice 8 . Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. On note $P_0 = 1$, $P_i = X(X-1)\cdots(X-i+1)$ pour $i \ge 1$, et $f_i : P \longrightarrow P(i)$.

1) **Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de E et $\mathcal{B} = (f_0, \dots, f_n)$ est une base de E^*.**
2) **Décomposer la forme linéaire P_n^* dans la base $\mathcal{B}$.**

   Indication : On pourra montrer que : $P_n^* = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i} f_i}{i!\,(n-i)!}$.
3) **Décomposer de même les autres formes linéaires P_k^*.**

Exercice 9 . Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$ et $a, b \in \mathbb{K}$ distincts. On pose $P_k = (X-a)^k (X-b)^{n-k}$.

1) **Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de E.**
2) **On suppose $n = 2$ et on prend comme base de E^* : $\mathcal{B} = (f_a, f_c, f_b)$ où $f_x(P) = P(x)$ et $c = \dfrac{a+b}{2}$.**
   Exprimer les formes linéaires (P_0^*, P_1^*, P_2^*) dans $\mathcal{B}$.

Exercice 10 . Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espace vectoriel de E tels que $F \oplus G = E$.

1) **Montrer que $F^\circ \oplus G^\circ = E^*$.**
2) **Montrer que F° est naturellement isomorphe à G^* et G° à F^*.**

Exercice 11 **. Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$, $Q \in E$ de degré n et $Q_i = Q(X+i)$ $(0 \leq i \leq n)$.**

1) **Montrer que $(Q, Q', Q'', \dots, Q^{(n)})$ est libre.**

2) **Montrer que toute forme linéaire sur E peut se mettre sous la forme :**
$f : P \longrightarrow \alpha_0 P(0) + \alpha_1 P'(0) + \cdots + \alpha_n P^{(n)}(0)$.

3) **Soit $f \in E^*$ telle que $f(Q_0) = \cdots = f(Q_n) = 0$. Montrer que $f = 0$.**
Indication : Considérer le polynôme $P = \alpha_0 Q + \cdots + \alpha_n Q^{(n)}$.

4) **Montrer que $(Q_0, \dots, Q_n)$ est une base de E.**

Exercice 12 **. Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$.**

1) **Soit $\varphi \in E^*$ telle que : $\forall\ P \in \mathbb{K}_{n-1}[X],\ \varphi((X-a)P) = 0$.**
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $\forall\ P \in E,\ \varphi(P) = \lambda P(a)$.

2) **Soit $\varphi \in E^*$ telle que : $\forall\ P \in \mathbb{K}_{n-2}[X],\ \varphi((X-a)^2 P) = 0$.**
Montrer qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que :
$\forall\ P \in E,\ \varphi(P) = \lambda P(a) + \mu P'(a)$.

Exercice 13 **. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in E^*$ toutes deux non nulles. Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{u} \in E$ tel que $f(\vec{u}) \neq 0$ et $g(\vec{u}) \neq 0$.**

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\phi_A : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ M & \longmapsto & \mathbf{tr}(AM). \end{array}$

1) **Montrer que $E^* = \{\phi_A \text{ tel que } A \in E\}$.**

2) **On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques. Montrer que :** $\begin{array}{l} \mathcal{S}^\circ = \{\phi_A \text{ tel que } A \in \mathcal{A}\} \\ \mathcal{A}^\circ = \{\phi_A \text{ tel que } A \in \mathcal{S}\} \end{array}$.

Exercice 14 **. *Polynômes trigonométriques.***
On note $f_n(x) = \cos nx$ et $g_n(x) = \sin nx$ $(x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$.
Soit E_n l'espace engendré par la famille $\mathcal{F}_n = (f_0, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$.

1) **Montrer que pour $k \geq 1$, (f_k, g_k) est libre.**

2) **Soit** $\varphi : \begin{array}{ccc} E_n & \longrightarrow & E_n \\ f & \longmapsto & f'' \end{array}$ **. Chercher les sous-espaces propres de φ. En déduire que $\mathcal{F}_n$ est libre.**

3) **On note** $a_k = \dfrac{2k\pi}{2n+1}$ **et** $\varphi_k : \begin{array}{ccc} E_n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(a_k). \end{array}$
Montrer que $(\varphi_0, \dots, \varphi_{2n})$ est une base de E_n^*.

4) **Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note** $b_k = \dfrac{2k\pi}{N}$ **et** $\psi_k : \begin{array}{ccc} E_n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(b_k). \end{array}$
Montrer que $(\psi_0, \dots, \psi_{N-1})$ est libre si et seulement si $N \leq 2n+1$, et engendre E_n^* si et seulement si $N \geq 2n+1$.

Exercice 15 **. *Formes linéaires liées.***

1) **Soient $f_1, \dots, f_n$ des formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$ telles qu'il existe $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$ non nul tel que $f_1(\vec{x}) = \cdots = f_n(\vec{x}) = 0$.**
Montrer que $(f_1, \dots, f_n)$ est liée.

2) **Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. On considère les formes linéaires : $f_i : P \longrightarrow P(i)$. Montrer que $(f_0, \dots, f_n)$ est liée.**

3) **Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. On considère les formes linéaires : $f_i : P \longrightarrow P'(i)$. Montrer que $(f_0, \dots, f_n)$ est liée.**

Exercice 16 . **Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . On suppose qu'il existe p formes linéaires $f_1, \dots, f_p$ telles que : $\forall\ \vec{x} \in E,\ (f_1(\vec{x}) = \cdots = f_p(\vec{x}) = 0) \Longrightarrow (\vec{x} = \vec{0})$.**
Montrer que E est de dimension finie inférieure ou égale à p.

Exercice 17 . ***Orthogonal d'un sous-espace vectoriel .***
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel de E^* dimension p. On note $F^\perp = \{\vec{x} \in E$ tel que $\forall\ f \in F$ on a $f(\vec{x}) = 0\}$. Déterminer $\dim F^\perp$.

Exercice 18 . ***Formes linéaires et trace sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.***

1) **Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ tel que $AM = MA,\ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que : $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$.**
2) **Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ tel que $\mathbf{Tr}(AM) = 0,\ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que : $A = 0$.**
3) **Pour tout $A, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $\varphi_A(M) = \mathbf{tr}(AM)$. Montrer que l'application φ_A est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.**
4) **En déduire que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^* \\ A & \longmapsto & \varphi_A \end{array}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel .**
5) **Soit ϕ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une et une seule matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \phi(X) = \mathbf{Tr}(AX)$**
6) **On suppose de plus que $\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \phi(XY) = \phi(YX)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \phi(X) = \lambda \mathbf{Tr}(X)$**

2 Formes quadratiques.

Exercice 19 . **Déterminer si les formes quadratiques suivantes sont positives :**

1) $q(x,y) = (1-\lambda)x^2 + 2\mu xy + (1+\lambda)y^2$.
2) $q(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z(x\cos\alpha + y\sin\alpha)$.
3) $q(x,y,z,t) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + t^2 + 2xy + xt$.

Exercice 20 . ***Calcul de signature.***
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients strictement positifs. Déterminer la signature de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ définie par : $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} a_{i,j}(x_i - x_j)^2$.

Exercice 21 . ***Signature de ${}^tAA$.***
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1) **Montrer que ${}^tAA$ est la matrice d'une forme quadratique positive sur $\mathbb{R}^p$.**
2) **Déterminer sa signature en fonction de $\mathrm{rg}A$.**

Exercice 22 . ***Décomposition en carrés.***
Décomposer en carrés la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} x_i x_j = \frac{1}{2}\sum_{i\geq 1} x_i^2 + \frac{1}{2}\Big(\sum_{i\geq 1} x_i\Big)^2$$

On posera $y_i = x_i + (x_{i+1} + \cdots + x_n)/(i+1)$.

Exercice 23 . *Rang d'une décomposition en carrés*
Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel E de dimension finie et $f_1, \dots, f_p \in E^*$, $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $q = \alpha_1 f_1^2 + \cdots + \alpha_p f_p^2$.
Montrer que $\mathbf{rg}(f_1, \dots, f_p) \geq \mathbf{rg}(q)$.

Exercice 24 . *Différentielle d'une forme quadratique.*
Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ et f la forme bilinéaire symétrique associée.
Montrer que : $\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n,\ dq_{\vec{x}}(\vec{y}) = 2f(\vec{x}, \vec{y})$.

Exercice 25 .
Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E et q la forme quadratique associée. On pose pour $x \in\ E$: $\varphi(x) = q(a)q(x) - f^2(a, x)$.

1) **Montrer que φ est une forme quadratique sur E.**
2) **Si E est de dimension finie comparer les rangs de φ et q.**
3) **Dans le cas général, déterminer le noyau de la forme polaire de φ en fonction de celui de f et de a.**

Exercice 26 .
Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $q(A) = \mathbf{tr}(A^2)$. Montrer que q est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa signature
***Indication* : étudier les restrictions de q aux sous-espace vectoriel des matrices symétriques et antisymétriques.**

Fin
à la prochaine