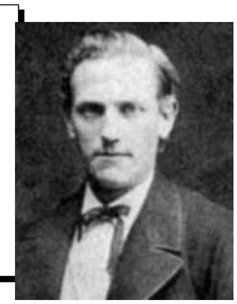
CPGE My Youssef, Rabat

Feuille d'exercices: *Espaces vectoriels euclidiens*

6 janvier 2010

Blague du jour :
Lors d'un entretien d'embauche, un chef d'entreprise reçoit quatre ingnieurs. Il leur explique que pour faire marcher une son entreprise, il suffit de savoir compter, et leur demande de comter jusqu'à 10.
Le polytechnicien : une... deux... une... deux...
Le HEC : Un KiloEuro ; deux KE, trois KE...
L'informaticien : 0...1...0...1...0...
Désespéré, il s'adresse au dernier candidat sortant de fac : Allez-y, comptez...
Le jeune homme commence : 1... 2... 3... 4... 5... 6... 7...
Le chef d'entreprise trés ému : continuez, continuez...
L'universitaire : 8... 9... 10... valet... dame... roi... !

Mathmaticien du jour ***Gram***
Jorgen Pedersen Gram (1850-1916) est un actuaire et mathématicien danois, trés connu à l'aide procèdé de Gram-Shmidt. Son nom est aussi lié aux travaux sur la fameuse fonction zéta de Riemann.
Gram était le premier mathématicien à une théorie systématique pour l'étude des courbes de fréquence obliques, prouvant que la courbe gaussienne symétrique normale était juste un cas spécial d'une classe plus générale des courbes de fréquence. Il est mort après avoir été heurté en une bicyclette.



Remerciements : Pour Michel Quercia (lycée Carnot de Dijon) et Hafid Bassou (ERN, Casablanca) pour les fichiers sources en latex.

Exercice 1 . **Donner dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ la matrice de la projection orthogonale sur : $F = Vect(e_1 + 2e_2 + e_3, e_3)$.**

Exercice 2 ..

1) **Reconnaitre les endomorphismes dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont :**

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

2) **Complétez la matrice**

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & . \\ -2 & 6 & . \\ 3 & . & . \end{pmatrix}$$

pour que A soit une matrice orthogonale positive.

Exercice 3 . **Soit u un vecteur unitaire de matrice U dans une base orthonormée $\mathcal{B}$.**

1) **Montrer que U^tU est la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur Vect(u).**
2) **Trouver la matrice de la symtrie associée.**

Exercice 4 **.** **E désigne un espace euclidien de dimension n.**
Soit $f : E \to E$ une application non nécéssairement linéaire.

1) **On suppose que f conserve le produit scalaire.**
   Démontrer que f est linéaire.
2) **On suppose que f conserve les distances.**
   Démontrer que $f = f(0_E) + g$, avec $g \in \mathcal{O}(E)$.

Exercice 5 **. Soit $\vec{v} \in E \setminus \{\vec{0}\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose pour $\vec{x} \in E$: $f(\vec{x}) = \vec{x} + \lambda(\vec{x} \mid \vec{v})\vec{v}$.**
Déterminer λ pour que $f \in \mathcal{O}(E)$. Reconnaitre alors f.

Exercice 6 **. Montrer que les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui concervent le produit vectoriel sont exactement les rotations.**

Exercice 7 **. Soit E espace vectoriel euclidien, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'élèments E, tous unitaires telle que :**

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{e_i}\right)^2 \qquad \forall x \in E$$

Montrer que c'est une base orthonormée de E.

Exercice 8 **.** ***Inversion***
Soit E un espace vectoriel euclidien. On pose pour $\vec{x} \neq \vec{0}$: $i(\vec{x}) = \dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}$.

1) **Montrer que i est une involution et conserve les angles de vecteurs.**
2) **Vrifier que : $\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in E \setminus \{\vec{0}\}$, $\|i(\vec{x}) - i(\vec{y})\| = \dfrac{\|\vec{x} - \vec{y}\|}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}$.**

Exercice 9 **.** ***Projection sur un hyperplan***
On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel. Soit $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$ où $a_1, \ldots, a_n$ sont des réels donnés non tous nuls. Chercher la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur H.

Exercice 10 **. Formule du produit mixte.**
Montrer que $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ on a :

$$x \wedge (y \wedge z) = (\overrightarrow{x}|\overrightarrow{z})\, y - (\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y})\, z$$

Exercice 11 **. Division vectorielle.**
Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

1) **Soient $\vec{a}, \vec{b}$ deux vecteurs donns, $\vec{a} \neq \vec{0}$.**
   Étudier l'équation : $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$.
   Indication : On cherchera une solution particulière de la forme $\vec{x} = \vec{a} \wedge \vec{y}$.
2) **Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs donnés Trouver $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tels que**

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{a} \wedge \vec{b} \\ \vec{v} &= \vec{b} \wedge \vec{c} \\ \vec{w} &= \vec{c} \wedge \vec{a} \end{aligned}$$

   Indication : calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Exercice 12 . **Polynômes de Laguerre :**
On pose pour entier, n et réel, x : $L_n(x) = (-1)^n e^x (x^n e^{-x})^{(n)}$

1) **Montrer que L_n est un polynôme, préciser son degré, ainsi que son coéfficient dominant.**
2) **Donner L_0, L_1, L_2.**
3) **Pour $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonctions polynomiales, on pose $\left(\overrightarrow{f} \,|\, \overrightarrow{g}\right) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}\mathrm{d}t$.**
Montrer que cet intgrale existe et qu'ainsi on muni $\mathbb{R}[X]$ d'un produit scalaire.
4) **Montrer que si $k < n$ alors $\left[(x^n e^{-x})^{(k)}\right](0) = 0$.**
5) **En déduire que pour tout $k < n$ on a : $< L_k, L_n >= 0$, puis que $(L_k)_{0\leq k\leq n}$ est une famille orthogonale.**
6) **Pour tout entier k ,on pose $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t$, justifier l'existence de cet intgrale, puis base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.**
7) **En déduire $\min\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t^2 + at + b)^2 e^{-t}\mathrm{d}t$.**

Exercice 13 . **Polynômes de Tchebychev :**
On pose pour n entier et $-1 \leq x \leq 1$, $T_n(x) = \cos(nArccos(x))$.

1) **Montrer que $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$.**
2) **Pour tous $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ continues, on pose :**

$$\left(\overrightarrow{f} \,|\, \overrightarrow{g}\right) = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

Montrer que cet intégrale existe et qu'ainsi on muni $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ d'un produit scalaire.
3) **Montrer que la famille $(T_k)_{0\leq k\leq n}$ est une famille orthogonale.**

Exercice 14 . **Ingalité de Ptoléme.**
Soit E un espace euclidien. Pour $\vec{x} \in E \setminus \{\vec{0}\}$, on pose $f(\vec{x}) = \dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\,\|^2}$.

1) **Montrer que f est une involution, $f^2 = \mathrm{id}_E$ et conserve les angles de vecteurs.**
2) **Montrer que : $\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in E \setminus \{\vec{0}\}$, $\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| = \dfrac{\|\vec{x} - \vec{y}\,\|}{\|\vec{x}\,\|\,\|\vec{y}\,\|}$.**
3) **Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in E$. Montrer que :**
$\|\vec{a} - \vec{c}\|\,\|\vec{b} - \vec{d}\| \leq \|\vec{a} - \vec{b}\,\|\,\|\vec{c} - \vec{d}\,\| + \|\vec{b} - \vec{c}\|\,\|\vec{a} - \vec{d}\,\|$.
Indication : se ramener au cas $\vec{a} = \vec{0}$ et utiliser l'application f.

Exercice 15 . **Étude de symétries.**

1) **Soient F, G deux sous-espaces de E tels que $F \perp G$. On note s_F et s_G les symtries orthogonales de bases F et G.**
Montrer que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{(F\oplus G)^\perp}$.
2) **Soient F, G deux sous-espaces de E tels que $F \subset G$. On note s_F et s_G les symétries orthogonales de bases F et G.**
Montrer que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{F\oplus G^\perp}$.
3) **Soient H, K deux hyperplans de E, et s_H, s_K les syméétries associes.**
Démontrer que s_H et s_K commutent si et seulement si $H = K$ ou $H^\perp \subset K$.

Exercice 16 . **Étude de projections.**

1) **Caractrisation des projections orthogonales.**
Soit E un espace vectoriel euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ une projection.
Montrer que :
p est une projection orthogonale $\Longleftrightarrow \forall\ \vec{x} \in E,\ \|p(\vec{x})\| \leq \|\vec{x}\,\|$.

2) **Composition de projecteurs.**
Soient F, G deux sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E tels que $F^{\perp} \perp G^{\perp}$. On note p_F et p_G les projections orthogonales sur F et sur G. Montrer que $p_F + p_G - p_{F\cap G} = \mathrm{id}_E$ et $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F = p_{F\cap G}$.

3) **Projecteurs commutant**
Soit E un espace vectoriel euclidien et p, q deux projections orthogonales. Montrer que p et q commutent si et seulement si (Im $p \cap$ Im $q)^{\perp} \cap$ Im p et (Im $p \cap$ Im $q)^{\perp} \cap$ Im q sont orthogonaux.

Exercice 17 . **On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire suivant**

$$< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt,$$

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\begin{aligned} &\varphi(P)(X) = (X^2 - X)P''(X) + (2X-1)P'(X) \\ &s(P)(X) = P(1-X) \end{aligned}$$

1) **Montrer que φ, s définissent des endomorphismes sur $\mathbb{R}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$**
2) **Donner leurs matrices dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$.**
3) **En déduire leurs valeurs propres, sont-ils bijectifs ? diagonalisables ?**
4) **Montrer que $\forall k \in [\![0, n]\!], \exists! L_k \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\deg(L_k) = k, co(L_k) = 1, \varphi(L_k) = k(k+1)L_k$.**
5) **Montrer que $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]^n$ on a :**
$\left(\overrightarrow{\varphi(P)}|\overrightarrow{Q}\right) = \left(\overrightarrow{P}|\overrightarrow{\varphi(Q)}\right)$ **et** $\left(\overrightarrow{s(P)}|\overrightarrow{Q}\right) = \left(\overrightarrow{P}|\overrightarrow{s(Q)}\right)$.
6) **En déduire que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.**
7) **En utilisant c. Dire pourquoi les matrices de φ, s dans $(L_0, \ldots, L_n)$ sont symétriques, expliciter ensuite ces matrices.**
8) **Montrer que s est une réflexion, préciser par rapport quel hyperplan.**

Exercice 18 . ***famille de vecteurs unitaires équidistants.***

1) **Soit E un espace vectoriel euclidien, et $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ une famille libre. Démontrer qu'il existe une famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ vérifiant :** $\begin{cases} \vec{u}_i \textbf{ est unitaire} \\ \|\vec{u}_i - \vec{u}_j\| = 1 \\ \textbf{vect}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_i) = \textbf{vect}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i). \end{cases}$
2) **Démontrer que toute famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ vérifiant les deux premires propriétés est libre.**

Exercice 19 . $F + F^{\perp} \neq E$

Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni du produit scalaire : $(f \mid g) = \displaystyle\int_t^1 fg(t)\,\mathrm{d}t$, et $F = \{f \in E$ tel que $f(0) = 0\}$. Montrer que $F^{\perp} = \{0\}$.
Indication : $xf \in F,\ \forall f \in E$.

Exercice 20 . **Matrice de Gram.**
Soient $\mathcal{C} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n, et Gram$(x_1, \dots, x_p)$ leur matrice de Gram de type $p \times p$, dont les coefficients sont $(\overrightarrow{x_i}|\overrightarrow{x_j})$. On pose $\Gamma(x_1, \dots, x_p) = \det(\mathbf{Gram}(x_1, \dots, x_p))$
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E, et $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$.

1) a) **Comparer rg$A$ et rg$(x_1, \dots, x_p)$.**
   b) **Préciser le type de la matrice A, ainsi que ses cofficients.**
   c) **Montrer que ${}^tAA = Gram(x_1, \dots, x_p)$.**
   d) **Montrer que $\ker {}^tAA = \ker A$, en déduire que rg$(x_1, \dots, x_p) =$ rg $Gram(x_1, \dots, x_p)$.**
2) a) **Montrer que $\det G$ est inchangé si on remplace x_k par $x_k - \sum_{i \neq k} \lambda_i x_i$.**
   b) **Soit $F = \mathbf{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et $x \in E$.**
   Montrer que $d(x, F)^2 = \dfrac{\Gamma(x_1, \dots, x_n, x)}{\Gamma(x_1, \dots, x_n)}$.
3) **On suppose dans cette question que $\mathcal{B}$ une fammile quelconque de E, vérifiant la relation suivante :**
$$\forall\ cx \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)^2$$
   a) **Démontrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.**
   b) **Démontrer que : $\forall\ x, y \in E,\ (x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)(y \mid e_i)$.**
   c) **On note G la matrice de Gram de $e_1, \dots, e_n$.**
   Démontrer que $G^2 = G$ et conclure.
4) **Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on suppose dans cette question que $\mathcal{B}$ une base quelconque de E. Montrer que $\Gamma(u(e_1), \dots, u(e_n)) = (\det u)^2 \Gamma(e_1, \dots, e_n)$.**
5) **Soit $A \in matn, p\mathbb{R}$. Montrer que $\det({}^tAA) \geq 0$.**
6) **Soit un tétraèdre $ABCD$ tel que $AB = AC = AD = 1$ et $(AB, AC) \equiv \dfrac{\pi}{4}$, $(AB, AD) \equiv \dfrac{\pi}{3}$, $(AC, AD) \equiv \dfrac{\pi}{2}$. Calculer son volume.**
7) **Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases quelconques de E. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ $\mathcal{B}'$, et G, G' les matrices de Gram de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Quelle relation y a-t-il entre P, G et G' ?**
8) **Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E, G sa matrice de Gram et $G^{-1} = (a_{ij})$.**
   Montrer que : $\forall\ \vec{x} \in E,\ \sum_{i,j} a_{ij} (\vec{e}_i \mid \vec{x})(\vec{e}_j \mid \vec{x}) = \|\vec{x}\|^2$.
9) **Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base non orthonormée de E, G sa matrice de Gram $f \in \mathcal{L}(E)$ et M sa matrice dans $\mathcal{B}$.**
   a) **Montrer que f est auto-adjoint si et seulement si ${}^tMG = GM$.**
   b) **Montrer que f est orthogonal si et seulement si ${}^tMGM = G$.**

Exercice 21 . **Propriétés du produit vectoriel.**
Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}$ quatre vecteurs d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.
Démontrer que :
$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) = 0$$
$$(\vec{u} \wedge \vec{v}).(\vec{w} \wedge \vec{t}) = (\vec{u} \mid \vec{w})(\vec{v} \mid \vec{t}) - (\vec{u} \mid \vec{t})(\vec{v} \mid \vec{w})$$
$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge (\vec{w} \wedge \vec{t}) = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\vec{t} + [\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}]\vec{w}$$

Exercice 22 ..

1) ***Décomposition*** QR ***:*** **Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale, P, et une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs, T, uniques telles que $M = PT$.**
2) ***Inégalité de Hadamard :*** **Soit E un espace vectoriel euclidien, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base orthonormée, et $\mathcal{C} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ des vecteurs quelconques.**
   Démontrer que $|\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})| \leq \prod_j \|\vec{u}_j\|$. Étudier les cas d'galité.

Exercice 23 . ***Famille obtusangle***

Soit E un espace vectoriel euclidien et $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ une famille de vecteurs vérifiant : $\forall\ i \neq j,\ (\vec{u}_i \mid \vec{u}_j) < 0$.

1) **Démontrer, par récurrence sur n que rg$(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) \geq n-1$.**
2) **Si rg$(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) = n-1$, démontrer que toute famille de $n-1$ vecteurs extraite de $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est libre, et que les composantes dans cette famille du vecteur retiré sont strictement négatives.**

Exercice 24 . ***Théorème de Hanh-Banach.***

Soit E un espace préhilbertien réel

1) **Soit $x_0 \in E$ tel que $x_0 \neq 0_E$, montrer qu'il existe $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi(x_0) \neq 0$.**
   Indication : **Écrire $E = \mathbb{R}x_0 \oplus H$ où H hyperplan.**
2) **Soit $x, y \in E$ tel que $x \neq y$, montrer qu'il existe $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.**
3) **Soit B une boule ouverte de E ne contenant pas $\vec{0}$. Montrer qu'il existe une forme linéaire $f \in E^*$ telle que : $\forall\ \vec{x} \in B,\ f(\vec{x}) > 0$.**

Exercice 25 . ***Calcul de minimums.***

Justifier l'existence des minimus des fonctions réelles suivantes et préciser comment les calculer.

1) $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a,b) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{\pi} (\sin x - ax^2 - bx)^2 \,\mathrm{d}x. \end{array}$$
   Réponse : $a = \dfrac{20}{\pi^3} - \dfrac{320}{\pi^5}$, $b = \dfrac{240}{\pi^4} - \dfrac{12}{\pi^2}$, $\min = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{8}{\pi} + \dfrac{160}{\pi^3} - \dfrac{1280}{\pi^5}$.
2) $$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 (1 + tx_1 + \cdots + t^n x_n)^2 \,\mathrm{d}t \end{array}.$$
   Réponse : $\min = \dfrac{1}{16}$.
3) $$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(1 + tx_1 + \cdots + t^n x_n)^2 \,\mathrm{d}t \end{array}.$$
   Réponse : $\dfrac{1}{4}$.

Exercice 26 . ***Décomposition de Cholesky.***

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive.

1) **Montrer qu'il existe une matrice T triangulaire supérieure telle que $A = {}^tTT$. Montrer que T est unique si on impose la condition : $\forall\ i,\ T_{ii} > 0$.**
2) **Application : Montrer que $\det A \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.**

Exercice 27 . $F \neq E$ **mais** $F^{\perp} = \{0_E\}$**.**

1) **Soit** E **unespace vectoriel réel muni d'un produit scalaire** $(\rightarrow|\rightarrow)$**, et** F **un sous-espace vectoriel de** E**.**
   a) **Montrer que l'application** $(x, y) \mapsto (\overrightarrow{x}\,|\,\overrightarrow{y})$ **est continue sur** E^2**.**
   b) **Soit** $x \in E$ **fixé, montrer que l'application** $y \mapsto (\overrightarrow{x}\,|\,\overrightarrow{y})$ **est continue sur** E**.**
   c) **En déduire que** $\overline{F}^{\perp} = F^{\perp}$**.**
   d) **On suppose que** F **est dense dans** E**, montrer que** $F^{\perp} = \{0_E\}$**.**
   Si de plus $F \neq E$**, montrer que** F **n'admet pas de supplémentaires orthogonal.**
2) **Soit** $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ **muni du produit scalaire usuel,** F **le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales et** g **la fonction exponentielle sur** $[0, 1]$**.**
   a) **Montrer que** $g \notin F$**.**
   b) **Montrer qu'il existe une suite** (f_n) **de fonctions polynomiales convergeant vers** g **pour la norme euclièdienne.**
   c) **En déduire que** F **n'a pas de supplémentaire orthogonal.**
3) **Soit** $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ **muni du produit scalaire usuel. Pour** $f \in E$**, on pose** $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$**.**
   a) **Montrer que** φ **est continue.**
   b) **Montrer que** $H = \ker \varphi$ **est fermé.**
   c) **Montrer que** $H^{\perp} = \{0\}$**.**

Exercice 28 . Soit E **un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et** $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ **une application bilinaire antisymtrique. Montrer qu'il existe** $\varphi \in E^*$**, unique, telle que : ,** $\phi(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{x} \wedge \vec{y}),\ \forall\ \vec{x}, \vec{y} \in E$**.**

Exercice 29 . ***Conjugué d'une rotation.***

1) **Soit** ρ **une rotation d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, et** $f \in \mathcal{O}(E)$**. Reconnaitre** $f \circ \rho \circ f^{-1}$**.**
   Application : **Déterminer le centre de** $\mathcal{O}^{+}(E)$**.**
2) **Soient** $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ **ayant même polynôme caractéristique. Montrer qu'il existe** $h \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ **tel que** $f = h^{-1} \circ g \circ h$**.**
   Si f **et** g **sont positifs, a-t-on** h **positif ?**
   Application : **Montrer que deux matrices orthogonale d'ordre 3 sont semblables si et seulement si elles ont même polynoôme caractéristique.**

Exercice 30 . ***Quotients de Rayleigh.***
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ **auto-adjoint, on se propose d'étudier les extremum du quotient de Rayleigh** $R_f(x) = \dfrac{(f(\vec{x}) \mid \vec{x})}{\|\vec{x}\,\|}$ **où** $x \neq 0_E$**. Soit** $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ **les valeurs propres de** f**.**

1) **Montrer que :** $\forall\ \vec{x} \in E,\ \lambda_1 \|\vec{x}\,\|^2 \leq (f(\vec{x}) \mid \vec{x}) \leq \lambda_n \|\vec{x}\,\|^2$**.**
2) **Montrer que si l'une de ces deux ingalités est une égalité pour un vecteur** $\vec{x} \neq \vec{0}$**, alors** $\vec{x}$ **est vecteur propre de** f**.**
3) **Soit** $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ **une base orthonormée de** E **telle que pour tout** i **:** $(f(\vec{e}_i) \mid \vec{e}_i) = \lambda_i$**.**
   Montrer que : $\forall\ i,\ f(\vec{e}_i) = \lambda_i \vec{e}_i$**.**
4) **En déduire que le quotient de Rayleigh de** f **atteint ses extremums, préciser ces extremums et en quels vecteurs ils sont atteints.**

Exercice 31 . **Reconnaître les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ définis par les expressions analytiques suivantes dans la base canonique :**

1) $\begin{cases} 3x' = 2x + 2y + z \\ 3y' = -2x + y + 2z \\ 3z' = x - 2y + 2z \end{cases}$

Réponse : rotation autour de $(1, 0, 1)$ **d'angle** $-\arccos(1/3)$.

2) $\begin{cases} 9x' = 8x + y - 4z \\ 9y' = -4x + 4y - 7z \\ 9z' = x + 8y + 4z \end{cases}$

Réponse : rotation autour de $(-3, 1, 1)$ **d'angle** $-\arccos(7/18)$.

3) $\begin{cases} 3x' = -2x + 2y - z \\ 3y' = 2x + y - 2z \\ 3z' = -x - 2y - 2z \end{cases}$

Réponse : demi-tour autour de $(-1, -2, 1)$.

4) $\begin{cases} 4x' = -2x - y\sqrt{6} + z\sqrt{6} \\ 4y' = x\sqrt{6} + y + 3z \\ 4z' = -x\sqrt{6} + 3y + z \end{cases}$

Réponse : rotation autour de $(0, 1, 1)$ **d'angle** $2\pi/3$.

5) $\begin{cases} x' = \dfrac{x}{\sqrt{3}} + \dfrac{y}{\sqrt{2}} - \dfrac{z}{\sqrt{6}} \\ y' = \dfrac{x}{\sqrt{3}} + \dfrac{2z}{\sqrt{6}} \\ z' = \dfrac{x}{\sqrt{3}} - \dfrac{y}{\sqrt{2}} - \dfrac{z}{\sqrt{6}} \end{cases}$

Réponse : rotation autour de $(-2-\sqrt{3}, 1+\sqrt{2}, \sqrt{2}-\sqrt{3})$ **d'angle** $\arccos(\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2} + 1}{2\sqrt{6}})$.

6) $\begin{cases} 3x' = x + 2y + 2z \\ 3y' = 2x + y - 2z \\ 3z' = 2x - 2y + z \end{cases}$

Réponse : symétrie % $x = y + z$.

7) $\begin{cases} 7x' = -2x + 6y - 3z \\ 7y' = 6x + 3y + 2z \\ 7z' = -3x + 2y + 6z \end{cases}$

Réponse : symétrie % $3x = 2y - z$.

8) $\begin{cases} 3x' = 2x - 2y + z \\ 3y' = -2x - y + 2z \\ 3z' = x + 2y + 2z \end{cases}$

Réponse : symétrie % $x + 2y - z = 0$.

9) $\begin{cases} 3x' = 2x + y + 2z \\ 3y' = 2x - 2y - z \\ 3z' = -x - 2y + 2z \end{cases}$

Réponse : symétrie-rotation autour de $(1, -3, 1)$ **d'angle** $-\arccos(5/6)$.

10) $\begin{cases} 4x' = -x + 3y - z\sqrt{6} \\ 4y' = 3x - y - z\sqrt{6} \\ 4z' = x\sqrt{6} + y\sqrt{6} + 2z \end{cases}$

Réponse : symétrie-rotation autour de $(1, -1, 0)$ **d'angle** $\pi/3$.

11) $\begin{cases} 15x' = 5x - 10z \\ 15y' = -8x + 5y + 6z \\ 15z' = 6x - 10y + 8z \end{cases}$

Réponse : projection sur $2x + 2y + z = 0$ **puis rotation d'angle** $\arccos(3/5)$.

Exercice 32 . ***Quelques propriétés des endomorphismes auto-adjoints.***

1) ***Autoadjoint $\Longrightarrow$ linéaire.***
   Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que : $\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in E,\ (u(\vec{x}) \mid \vec{y}) = (\vec{x} \mid u(\vec{y}))$. Montrer que u est linéaire.
2) ***Composée auto-adjointe :*** **Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoints. Montrer que $u \circ v$ est auto-adjoint si et seulement si $u \circ v = v \circ u$.**
3) ***Composée de projecteurs :***
   Soient p, q deux projecteurs orthogonaux.
   a) **Montrer que $p \circ q \circ p$ est auto-adjoint.**
   b) **Montrer que $(\mathbf{Im}\ p + \ker q) \overset{\perp}{\oplus} (\ker p \cap \mathbf{Im}\ q) = E$.**
   c) **En déduire que $p \circ q$ est diagonalisable.**
4) ***Endomorphisme auto-adjoint et orthogonal :***
   Quels sont les endomorphismes de E la fois auto-adjoints et orthogonaux ?

Exercice 33 . ***Théorème de Courant-Fisher***
Soit E un espace vectoriel euclidien.

1) **Soit $v \in S(E)$, (i.e : auto-adjoint) tel que $\left(\overrightarrow{v(x)} | \overrightarrow{x}\right) = 0$ pour tout x. Montrer que $v = 0$.**
2) **Soient $u_1, \dots, u_p \in S(E)$. On suppose que $rg(u_1) + \cdots + rg(u_p) = n$, et que $\forall x \in E$, $\left(\overrightarrow{u_1(x)} | \overrightarrow{x}\right) + \cdots + \left(\overrightarrow{u_p(x)} | \overrightarrow{x}\right) = (\overrightarrow{x} | \overrightarrow{x})$.**
   a) **Montrer que $u_1 + \cdots + u_p = Id_E$.**
   b) **Montrer que $E = Im(u_1) \oplus \cdots \oplus Im(u_p)$.**
   c) **Montrer que pour tout i, u_i est la projection orthogonale sur $Im(u_i)$.**

Exercice 34 . ***Endomorphismes normaux.***
Soit E un espace vectoriel hermitien. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si u et u^* commutent.

1) **Soit u normal, montrer que si F est un sous-espace propre de u alors $F^{\perp}$ est stable par u.**
   En déduire que u est diagonalisable dans base orthonormale.
   La réciproque est-elle vraie ?
2) **Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'quivalence entre les propriétés suivantes :**
   (1) **u est normal.**
   (2) $\forall\ x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
   (3) **Tout sous-espace vectoriel stable par u est stable par u^*.**
   (4) **Si un sous-espace vectoriel F est stable par u alors $F^{\perp}$ est stable par u.**
   (5) **Il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $u^* = P(u)$.**
3) **Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f^* = f^* \circ f$ et $f^2 = -\mathrm{id}$. Montrer que f est orthogonal.**
4) **Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que $AA^* = A^*A \Longleftrightarrow \mathbf{tr}(AA^*) = |\lambda_1|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2$.**

Exercice 35 . **Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est symétrique définie positive si et seulement s'il existe $B \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tBB$.**

Exercice 36 . **Soit E un espace euclidien et q une forme quadratique positive. Montrer qu'il existe un endomorphisme u auto-adjoint tel que : $\forall\ \vec{x} \in E,\ q(\vec{x}) = \|u(\vec{x})\|^2$.**

Exercice 37 . **Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = I$. Montrer que $A^2 = I$.**

Exercice 38 . **Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que $\sum_{i,j} a_{ij}^2 = \sum_i \lambda_i^2$.**

Exercice 39 . ***evn $\Longrightarrow$ prèhilbertien ?***

Il est bien connu que si E est un espace prèhilbertien muni de la norme $\|.\|$, alors l'identit de la médiane (ou du parallèlogramme) est vérifiée, à savoir : pour tous x, y de E, on a : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$. L'objectif de cet exercice est de montrer une sorte de réciproque de cette propriété, à savoir le résultat suivant : si E est un espace vectoriel normé réel dont la norme vérifie l'identit de la médiane, alors E est nécessairement un espace prèhilbertien (c'est à dire qu'il existe un produit scalaire $(.,.)$ sur E tel que pour tout x de E, on a $(x,x) = \|x\|^2$. Il s'agit donc de construire un produit scalaire, et compte tenu des formules de polarisation, on pose : $(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right)$. Il reste vérifier que l'on a bien défini ainsi un produit scalaire.

1) **Montrer que pour tout x, y de E, on a $(x,y) = (y,x)$ et $(x,x) = \|x\|^2$.**
2) **Montrer que pour $x_1,\ x_2,\ y \in E$, on a $(x_1+x_2, y) - (x_1, y) - (x_2, y) = 0$ (on utilisera l'identité de la médiane avec les paires (x_1+y, x_2+y) et (x_1-y, x_2-y)).**
3) **Montrer, en utilisant la question précèdente, que si $x, y \in E$ et $r \in \mathbb{Q}$, on a : $(rx, y) = r(x,y)$.**
4) **En utilisant un argument de continuité, montrer que c'est encore vrai pour $r \in \mathbb{R}$.**
5) **Conclure !**

Exercice 40 . ***Décomposition polaire***

Soit E un espace vectoriel euclidien. Un endomorphisme symétrique $u \in S(E)$ est dit *positif* si pour tout x de E, $(u(x), x) \geq 0$. Il est dit *défini positif* si pour tout x de E non nul, $(u(x), x) > 0$. On notera $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs, et $S^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques définis positifs.

1) **Soit $u \in S(E)$. Montrer que u appartient $S^+(E)$ si et seulement si ses valeurs propres sont positives ou nulles. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de $u \in S(E)$ pour que $u \in S^{++}(E)$.**
2) **Soit $u \in S^+(E)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres (distinctes), et $E_i = \ker(u - \lambda_i Id_E)$. On dfinit v_i par $v_i(x) = \sqrt{\lambda_i}x$ si $x \in E_i$, et $v_i(x) = 0$ si $x \in E_i^\perp$. On note enfin $v = v_1 + \cdots + v_p$. Justifier que $v^2 = v \circ v = u$, et que v est positif.**
3) **Soit w un autre lment de $S^+(E)$ tel que $w^2 = u$.**
   a) **Montrer que $wu = uw$.**
   b) **En déduire que $w(E_i) \subset E_i$.**
   c) **Soit w_i l'endomorphisme induit par w sur E_i. Vérifier que w_i est syémtrique positif, puis diagonaliser w_i.**
   d) **En dduire que $w = v$.**
4) **Soit $f \in Gl(E)$.**
   a) **Montrer que $f^* \circ f \in S^{++}(E)$.**
   b) **Montrer qu'il existe un unique couple $(h, g) \in O(E) \times S^{++}(E)$ tel que $f = h \circ g$. Cette factorisation s'appelle *décomposition polaire* de f.**

Fin
À la prochaine