XM6-CPGE My Youssef

Feuille d'exercices

Intégrales doubles et curvilignes

Rabat le 3 avril 2010

Blague du jour :
Un jeune ingénieur vient d'être engagé dans une grosse entreprise multinationale. Dès son premier jour, il appelle la cafétéria et crie "Apportez-moi un café ! Et en vitesse ! ! !" De l'autre côté, une voix répond : " Je pense que vous avez composé une mauvaise extension. Savez-vous à qui vous parlez, espèce de crétin ? " " Non" répond le jeune engagé. " Je suis le PDG, pauvre imbécile " Le type lui répond alors en hurlant deux fois plus fort : " Et vous, vous savez à qui vous parlez, espèce de gros bâtard ? ? ? " " Non " répond le Directeur. " Parfait ! ! ! " répond le type et il raccroche son téléphone !

Mathématicien du jour **Fubini**
Guido Fubini (1879-1943) est un mathématicien italien célèbre notamment pour ses travaux sur les intégrales, mais aussi les équations différentielles, l'analyse fonctionnelle et complexe, le calcul des variations, la théorie des groupes, la géométrie non euclidienne et la géométrie projective. Lors de la première guerre mondiale, il s'intéressa à des sujets plus appliqués, comme la précision de l'artillerie ; après la guerre il continua dans cette optique, appliquant les résultats de ces études précédentes, notamment en électronique et en acoustique.

Remerciements : à Michel Quercia (Dijon) pour la source latex de ces exercices.

1 Intégrales doubles.

Exo 1

Calculer les intégrales doubles suivants :

1) $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$ où $\left\{D = (x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } 0\le x\le 1-\dfrac{y^2}{4}\right\}$.

2) $\iint_D x^2y dxdy$ où $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } 0\le x^2+y^2\le 1\right\}$.

3) $\iint_U xydxdy \qquad U = \{(x,y) \text{ tel que } x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 1\}$

4) $\iint_U |xy|dxdy \qquad U = \{(x,y) \text{ tel que } \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1\}$

5) $\iint_U (x^2+y^2)^2dxdy \qquad U = \{(x,y) \text{ tel que } x\ge 1, y\ge 1, x+y\le 3\}$

6) $\iint_U (1+x^2+y^2)dxdy \qquad U == \{(x,y) \text{ tel que } x^2+y^2\le 1\}$

Exo 2

Calculer $I = \iint_\Delta xy\,dxdy$ o $\Delta = \{(x,y) \text{ tq } y\ge 0 \text{ et } (x+y)^2\le 2x/3\}$.

Indication: Poser $u = x, v = x+y$. On obtient $I = \dfrac{2}{1701}$.

Exo 3

Calculer $I = \iint_\Delta (x^2+xy+y^2)\,dxdy$ où
$\Delta = \{(x,y) \text{ tq } y\ge 0 \text{ et } x^2+y^2-2x\le 0 \text{ et } x^2+y^2-2y\le 0\}$.

Indication: symétrie + passage en polaires. $I = \dfrac{3}{4}\pi - \dfrac{11}{6}$.

Exo 4

Calculer $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ dans les cas suivants :

1) $D = \{y\ge 0, x+y\le 1, y-x\le 1\}$, $f(x,y) = x^2y$.
Indication: $\dfrac{1}{30}$.

2) $D = \{x^2+y^2\le R^2\}$, $f(x,y) = x^2y$.
Indication: 0.

3) $D = \{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1\}$, $f(x,y) = x^2+y^2$.
Indication: $\dfrac{\pi}{4}ab(a^2+b^2)$.

4) $D = \{0\le x\le 1-\dfrac{y^2}{4}\}$, $f(x,y) = x^2+y^2$.
Indication: $\dfrac{96}{35}$.

Exo 5

Calculer $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ dans les cas suivants :

1) $D = \{x^2+y^2 \leq 1\}$, $f(x,y) = (x+y)^2$.
Indication: $\frac{\pi}{2}$.

2) $D = \{x^2+y^2 \leq 1\}$, $f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+1}$.
Indication: $\pi(1-\ln 2)$.

3) $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$, $f(x,y) = x+y+1$.
Indication: $\frac{5}{6}$.

4) $D = \{|x+y| \leq 1, |x-y| \leq 1\}$, $f(x,y) = \ln(x+y+1)$.
Indication: $2(\ln 2 - 1)$.

5) $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq \pi\}$, $f(x,y) = (x+y)\sin x \sin y$.
Indication: $\frac{3\pi}{2}$.

6) $D = \{|x| \leq x^2+y^2 \leq 1\}$, $f(x,y) = (1+x^2+y^2)^2$.
Indication: $\frac{65\pi}{48}$.

7) $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq a\}$, $f(x,y) = x+y+\sqrt{a^2+(x+y)^2}$.
Indication: $\frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$.

8) $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\}$, $f(x,y) = xy\sqrt{x^2+4y^2}$.
Indication: $\frac{7}{45}$.

9) $D = \{x^2+y^2-2y \leq 0\}$, $f(x,y) = y\exp(x^2+y^2-2y)$.
Indication: $\pi(1-\frac{1}{e})$.

10) $D = \{y^2 \leq 2px, x^2 \leq 2py\}$, $f(x,y) = \exp\left(\frac{x^3+y^3}{xy}\right)$.
Indication: $\frac{(e^{2p}-1)^2}{3}$ $\quad (x = u^2v, y = uv^2)$.

11) $D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$, $f(x,y) = 1/(1+x^2\tan^2 y)$.
Indication: $-\int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,dt = \frac{\pi}{2}\ln 2$.

Exo 6

1) Calculer $A = \iint_{0\leq y\leq x\leq 1} \frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}$.
Indication: $2A = \left(\int_{t=0}^{1}\frac{dt}{1+t^2}\right)^2 \Longrightarrow A = \frac{\pi^2}{32}$.

2) Démontrer la convergence des intégrales : $B = \int_{\theta=0}^{\pi/4}\frac{\ln(2\cos^2\theta)}{2\cos 2\theta}d\theta$, $C = \int_{\theta=0}^{\pi/4}\frac{\ln(2\sin^2\theta)}{2\cos 2\theta}d\theta$, et $D = \int_{t=0}^{1}\frac{\ln t}{1-t^2}\,dt$.

3) Démontrer que $A = B$ (passer en coordonnes polaires dans A).

4) Calculer $B+C$ et $B-C$ en fonction de D.
Indication: $B+C = \frac{D}{2}$, $B-C = -D$.

5) En déduire les valeurs de C et D.
Indication: $C = -\frac{3\pi^2}{32}$, $D = -\frac{\pi^2}{8}$.

Exo 7

Soit $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$. En calculant $J = \iint_D \frac{x\,dx\,dy}{(1+x^2)(1+xy)}$ avec $D = \{(x,y)\text{ tq } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ de deux façons différentes, trouver que $I = \frac{\pi\ln 2}{8}$.

Exo 8

Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 < b < a)$, et E le domaine limité par $\mathcal{E}$ et F, F' les foyers de $\mathcal{E}$. Calculer $I = \iint_{M\in E}(MF+MF')\,dxdy$.
Indication: On effectuera le changement de variable : $x = \sqrt{u^2+c^2}\cos v$, $y = u\sin v$ où $c = \sqrt{a^2-b^2}$. $2\pi b\left(a^2-\frac{b^2}{3}\right)$.

Exo 9

1) Montrer l'existence de $I = \int_{x=0}^{\pi/2}\frac{\ln(1+\cos x)}{\cos x}dx$.

2) Montrer que $I = \iint_D \frac{\sin y}{1+\cos x\cos y}dxdy$ o $D = [0,\frac{\pi}{2}]^2$.

3) En déduire la valeur de I.
Indication: Fubini, on trouve $I = \frac{\pi^2}{8}$.

Exo 10

Intégrale de Gauss : $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

1) Justifier la convergence de cette intégrale.
2) Pour $a > 0$ on note $\Delta_a = [0, a] \times [0, a]$ et C_a le quart de disque d'équations : $x^2 + y^2 \le a^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.
   a) Encadrer l'intégrale sur Δ_a de $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ par les intégrales de f sur des domaines du type C_b.
   b) Calculer $\iint_{C_b} f(x, y)\,dxdy$ en polaires et en déduire la valeur de I.

2 Intégrales triples.

Exo 11

Calculer le volume des domaines suivants :

1) D est l'intersection du cylindre de révolution d'axe Oz de rayon a et de la boule de centre O de rayon 1 ($0 < a < 1$).
   Indication: $V = \frac{4\pi}{3}(1 - \sqrt{1-a^2}^3)$.
2) D est l'intersection de la boule de centre O de rayon 1 et du cône de révolution d'axe Oz et de demi-angle $\frac{\pi}{4}$.
   Indication: $V = \frac{2\pi}{3}(2 - \sqrt{2})$.
3) D est le volume engendré par la rotation d'un disque de rayon r autour d'une droite coplanaire avec le disque, situe la distance $R > r$ du centre du disque (tore de révolution ou chambre air).
   Indication: $V = 2\pi^2 R r^2$.

Exo 12

Calculer les intégrales triples suivants :

1) $\iiint_D (x^2 + y^2)\,dxdydz$ où D est le tétraèdre de sommets $A(2, 1, 0); B(2, -1, 0); C(0, 0, 3), D(0, 0, -3)$.
2) $\iiint_D z^2 y\,dxdydz$ où $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $0 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$

Exo 13

Soit T un tore plein d'axe Oz et de rayons R, r ($R > r$).
Calculer $\iiint_T (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz$.
Indication: Passer aux coordonnées sphériques, on obtient $\frac{1}{2}\pi^2 R r^2(4R^2 + 3r^2)$.

Exo 14

Calculer $\iint_D f(x, y)\,dxdy$ dans les cas suivants :

1) $D = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$, $f(x, y, z) = \frac{1}{(x + y + z + 1)^3}$.
   Indication: $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{32}{27}\right)$.
2) $D = \{x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$, $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}}$ $(a > R > 0)$.
   Indication: $2\pi a^2 \arcsin\frac{R}{a} - 2\pi R\sqrt{a^2 - R^2}$.
3) $D = \{x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x + y + z \le 1\}$, $f(x, y, z) = xyz$.
   Indication: $\frac{1}{720}$.
4) $D = \{x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x + y + z \le 1\}$, $f(x, y, z) = \frac{1}{(x + y + z + 1)^2}$.
   Indication: $\frac{3}{4} - \ln 2$.
5) $D = \{x^2 + y^2 \le R^2, 0 \le z \le a\}$, $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3z(x^2 + y^2)$.
   Indication: $\frac{\pi R^2 a^2}{4}(a^2 + 3R^2)$.
6) $D = \{x^2 + y^2 \le z^2, 0 \le z \le 1\}$, $f(x, y, z) = \frac{z}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$.
   Indication: $\frac{\pi}{2}(1 - \ln 2)$.
7) $D = \left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\right\}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2$.
   Indication: $\frac{4\pi}{15}abc(a^2 + b^2)$.

Exo 15

1) Calculer $I = \iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{(1 + x^2z^2)(1 + y^2z^2)}$
   avec $D = \{(x, y, z)$ tq $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z\}$.
   Indication: Intégrer en z d'abord, on obtient $I = \pi \ln 2$.
2) En déduire $\int_{t=0}^{+\infty}\left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt$.
   Indication: Intégrer I en x et y d'abord. On obtient $I = \int_{z=0}^{+\infty}\left(\frac{\arctan z}{z}\right)^2 dz$.

Exo 16 Calculer le volume intérieur au paraboloïde d'équation $x^2+y^2=2pz$ et extérieur au cône d'équation $x^2+y^2=\lambda^2z^2$ ($p>0$, $\lambda>0$).
Indication: $V=\dfrac{4\pi p^3}{3\lambda^4}$.

Exo 17 Dans le plan Oxy on considère la courbe γ d'équation polaire $\rho=a\sqrt{\cos 2\theta}$ ($a>0$, $-\dfrac{\pi}{4}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{4}$). En tournant autour de Ox, γ engendre une surface dont on calculera le volume qu'elle limite *Indication:* on posera $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta\cos\phi$, $z=\rho\sin\theta\sin\phi$. On trouve $\dfrac{\pi a^3}{12\sqrt{2}}(3\ln(1+\sqrt{2})-\sqrt{2})$.

Exo 18 On coupe une demi-boule par un plan P parallèle sa base. Quelle doit être la position de P pour que les deux morceaux aient même volume ?
Indication: hauteur $=\alpha R$ avec $\alpha^3-3\alpha+1=0$.

3 Intégrales curvilignes.

Exo 19 Soit $\mathcal{P}$ le plan rapport au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe d'équation $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.
Indication: Formule de Green : $\mathcal{A}=\dfrac{3\pi a^2}{8}$.

Exo 20 On considère les courbes planes : $\mathcal{Q}_i : x^2=2q_iy$ et $\mathcal{P}_i : y^2=2p_ix$. On suppose $0<q_1<q_2$ et $0<p_1<p_2$. Calculer l'aire du quadrilatère limité par $\mathcal{P}_1$,$\mathcal{P}_2$,$\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$.
Indication: Formule de Green. $A=\dfrac{4}{3}(p_2-p_1)(q_2-q_1)$.

Exo 21 Calculer l'aire délimitée par la courbe d'équation $(y-x)^2=a^2-x^2$.
Indication: Formule de Green. $A=\pi a^2$.