

Feuille d'exercices
Intégrales à un paramètre

RABAT LE 16 FÉVRIER 2010

Blague du jour :

Une maman à sa jeune fille :
- Je te conseille d'épouser un archéologue.
- Ah bon ? Et pourquoi ?
- Parce que plus on vieillit, plus il vous aime.



Mathématicien du jour

Laplace

Pierre-Simon Laplace (1749-1827) est un mathématicien, astronome et physicien français, nommé ministre, comte et marquis. Il a contribué à l'émergence des théories de probabilité, d'astronomie mathématique. Il a transformé l'approche géométrique de la mécanique développée par Newton en une approche fondée sur l'analyse mathématique.

Remerciements : à Mrs Hafid Basso (Casablanca), Sadik Boujaida (Rabat) et Michel Quercia (Dijon) pour la source latex de ces exercices.

Exo
1

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt$ et $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{t^2+1} dt$.

- 1) Montrer que f et g sont définies et de classe C^2 sur $]0, +\infty[$.
- 2) Montrer que f et g sont solutions de l'équation : $y'' + y = \frac{1}{x}$.
- 3) Étudier les limites de f et g en $+\infty$.
- 4) Trouver une relation entre f et g .

Exo
2

On pose $H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{ixt} dt$

- 1) Montrer que la fonction H est bien définie, de classe C^1 sur \mathbb{R} .
- 2) Montrer que H est une solution de l'équation différentielle :
(E) $(x+i)y' + \frac{1}{2}y = 0$.
- 3) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\Phi(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 + \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} dt$.
Montrer que Φ est une fonction constante sur \mathbb{R} , préciser la valeur de cette constante.
En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$, puis celle de $H(0)$.
- 4) Résoudre l'équation (E) et donner l'expression de $H(x)$.

Exo
3

On pose $u_n(x) = \frac{(-1)^n n}{n^2+x^2}$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

- 1) Étudier l'ensemble de définition de f . Calculer $f(0)$.
- 2) Montrer que f est C^∞ . Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-at} \cos(bt) dt$.
- 3) En déduire que $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{1+e^t} dt$.
- 4) Développer f en $+\infty$ sous la forme : $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$.

Exo
4

Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 1$ et $f(0) = 1$.

On pose $\phi(x) = \int_0^{+\infty} f(t) \left(\frac{\sin xt}{t} \right)^2 dt$ et $H(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$.

- 1) Quel est le domaine de définition de ϕ ? Exprimer la limite L en 0^+ de $\frac{\phi(x)}{x}$ à l'aide d'une intégrale.
- 2) Prouver que l'on a $L = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.
- 3) Domaine de définition, continuité et dérivabilité de H .
- 4) Calculer H' puis expliciter H .

Exo
5

On pose pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$

1) Montrer rapidement que : $\forall u \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+u) \leq u$.

2) Montrer que $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$.

3) En déduire que $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

4) On pose pour $n \geq 1$, $f_n(x) = \ln\left(\frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}\right)$

Montrer en utilisant la série de fonctions $\sum f_n - f_{n-1}$ que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} - \gamma - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)}$$

Où γ désigne la constante d'Euler.

5) **Formule de Stirling** : Montrer que $\Gamma(x+1) \sim x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x}$ pour x réel tendant vers $+\infty$.

Indication : $\ln \Gamma$ est convexe, encadrer $\ln \Gamma(x)$ par les cordes passant par $(\lfloor x \rfloor, \ln \Gamma(\lfloor x \rfloor))$.

6) Calculer $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et comparer.

Exo
6

Fonction définie par une intégrale.

1) On pose pour $x \geq 0$: $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2 + t^2)}{1+t^2} dt$.

Calculer explicitement $f'(x)$ et en déduire $f(x)$ (on calculera $f(0)$ à l'aide du changement de variable $u = 1/t$).

2) On pose $I(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos^2 t + x^2 \sin^2 t) dt$. Montrer que I est de classe C^1 sur \mathbb{R}^{+*} . Calculer $I'(x)$ puis en déduire $I(x)$.

3) Soit $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{e^x - 1} dx$.

a) Justifier l'existence de $I(\alpha)$.

b) Déterminer les réels a et b tels que : $I(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{b+n^2}$.

Indication : $a = \alpha$, $b = \alpha^2$.

c) Donner un équivalent de $I(\alpha)$ quand $\alpha \rightarrow \infty$.

Indication : comparaison série-intégrale.

Exo
7

Intégrale de Gauss

On considère les fonctions définies par :

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2 \text{ et } g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$$

1) Montrer que f et g sont dérivables et calculer f' et g' .

2) Montrer que $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

3) En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4) En déduire l'existence et la valeur de $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-(t^2+a^2/t^2)} dt$. **Indication** : $u = \frac{a}{t}$.

5) Soit $I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2xt) dt$. Prouver que I est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

6) Chercher une relation simple entre I et I' .

Indication : $I'(x) = -2xI(x)$.

7) En déduire la valeur de $I(x)$

Exo
8

Considérons $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} e^{ixt}}{\sqrt{t}} dt$.

1) Vérifier que f est de classe C^1 sur \mathbb{R} et calculer sa drive.

2) En déduire une autre expression de f .

Exo
9

Posons $f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x dt$.

1) Quel est le domaine de définition \mathcal{D}_f de f ?

2) Montrer que f est une fonction continue sur \mathcal{D}_f .

3) Établir une relation entre $f(x+2)$ et $f(x)$, puis montrer que $xf(x)f(x+1)$ est une fonction constante.

4) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exo
10

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(xt)}{t^2(1+t^2)} dt$.

1) Donner le domaine de définition \mathcal{D}_f de f .

2) Étudier la régularité de f .

3) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exo
11

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$.

- 1) Déterminer le domaine de définition \mathcal{D}_f de f .
- 2) Montrer que f est C^1 sur \mathcal{D}_f .
- 3) Montrer que f satisfait une équation différentielle du premier ordre sur \mathcal{D}_f .
- 4) En déduire une autre écriture pour f .

Exo
12

On considère la fonction f définie par $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+x \cos t)}{\cos t} dt$

- 1) Quel est le domaine de définition \mathcal{D}_f de f ?
- 2) Montrer que f est C^1 sur $\mathring{\mathcal{D}}_f$.
- 3) En déduire une autre écriture de f .

Exo
13

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

- 1) Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^{\times} et calculer f' .
- 2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$.
- 3) En déduire une autre écriture de f .

Exo
14

$f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt$

- 1) Déterminer \mathcal{D}_f .
- 2) Montrer que f est C^1 sur \mathcal{D}_f et calculer f' .
- 3) Limites de f aux bornes

Exo
15

Étude et graphe de $x \mapsto \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt$.

Exo
16

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$

- 1) Déterminer \mathcal{D}_f
- 2) Montrer que f est C^2 sur \mathbb{R}_+ et calculer $\lim_{0^+} f$
- 3) Calculer $f + f''$ puis montrer que $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt$
- 4) En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$

Exo
17

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt$ et $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{t^2+1} dt$.

- 1) Montrer que f et g sont définies et C^2 sur $]0, +\infty[$.
- 2) Montrer que f et g sont solutions de : $y'' + y = \frac{1}{x}$.
- 3) Étudier les limites de f et g en $+\infty$.
- 4) Trouver une relation entre f et g .

Exo
18

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin at}{1+t^2} dt$

- 1) Domaine de définition, continuité et dérivabilité de f .
- 2) Calculer f et f'' . En déduire une équation différentielle satisfaite par f .
- 3) Expliciter f l'aide de fonctions usuelles.
- 4) Limite en $+\infty$ de f et f' En déduire f .

Exo
19

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt$.

Domaine de définition, continuité, dérivabilité, calcul de f' puis de f . Calculer $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t} \right)^2 dt$

Exo
20

On pose $u_n(x) = \frac{(-1)^n n}{n^2 + x^2}$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

- 1) Étudier l'ensemble de définition de f .
- 2) Calculer $f(0)$.
- 3) Montrer que f est C^∞ .
- 4) Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-at} \cos(bt) dt$.
- 5) En déduire que $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{1+e^t} dt$.
- 6) Développer f en $+\infty$ sous la forme : $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$.

Exo
21

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue tendant vers 1 en $+\infty$ et $f(0) = 1$.

On pose $\phi(x) = \int_0^{+\infty} f(t) \left(\frac{\sin xt}{t}\right)^2 dt$ ainsi que $H(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$.

- 1) Quel est le domaine de définition de ϕ ? Exprimer la limite L en 0^+ de $\frac{\phi(x)}{x}$ l'aide d'une intégrale.
- 2) Prouver que l'on a $L = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.
- 3) Domaine de définition, continuité et dérivabilité de H .
- 4) Calculer H' puis expliciter H .

Exo
22

Calcul de limite.

- 1) a) Prouver l'existence pour $x > 0$ de $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt$.
b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x)$.
Indication: Développer $\sin(t-x)$.
- 2) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Chercher $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{xf(t)}{x^2+t^2} dt$.
Indication: $\frac{\pi}{2}f(0)$.
- 3) Donner un équivalent pour $x \rightarrow +\infty$ de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x^2+t^2} dt$.
Indication: $t = ux$ puis intégration par parties.
- 4) Soit $a > 0$. Donner le DL en $x = 1$ l'ordre 3 de $f(x) = \int_{t=a/x}^{ax} \frac{\ln t}{a^2+t^2} dt$.

Indication: Calculer $f'(x)$.

- 5) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue. On pose $\varphi(x) = \left(\int_{t=a}^b (f(t))^x dt\right)^{1/x}$.
a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \max(f)$.
b) On suppose $f > 0$ et $b - a = 1$. Montrer que
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \exp\left(\int_{t=a}^b \ln(f(t)) t\right)$$

Indication: Montrer que pour $\varepsilon > 0$ et x assez petit, $|f(t)^x - 1 - x \ln(f(t))| \leq \varepsilon x$ puis intégrer.

- 6) a) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\int_0^1 f(t^n) dt = f(0)$.

Indication: Couper en $\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1-\varepsilon}^1$

- b) Chercher un équivalent pour $n \rightarrow +\infty$ de $\int_{t=0}^1 \frac{t^n dt}{1+t^n}$.

Fin
À la prochaine