CPGE My Youssef, Rabat

Feuille d'exercices: *Intégration vectorielle*

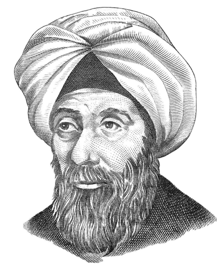
15 janvier 2010

Remerciements pour la source latex de ces exercices à Mrs Hafid Basso (Casablanca) Sadik Boujaida (Rabat) et Michel Quercia (Dijon)

Blague du jour :

• Quelle différence y a-t-il entre Windows et un clou ?
Réponse : Aucune : tous deux sont destinés à se planter.

• Quelle est la différence entre Windows et un virus ?
Réponse : Le virus lui, il fonctionne.



Mathématicien du jour *Ibn al-Haytam*

Ibn al-Haytham (965-1039) est un mathématicien et un physicien perse. Il est l'un des pères de la physique quantitative et de l'optique physiologique.
Craignant de possibles sanctions du calife d'Egypte, qui lui confie le projet d'arrêter les inondations du Nil, il fait semblant de folie et fût assigné à résidence. Il profita de ce loisir forcé pour écrire plusieurs livres (environ 200)
Il a été le premier à expliquer pourquoi le soleil et la lune semblent plus gros (on a cru longtemps que c'était Ptolémée). C'est aussi lui qui a contredit Ptolémée sur le fait que l'œil émettrait de la lumière. Selon lui, si l'œil était conçue de cette façon on pourrait voir la nuit. Il a compris que la lumière du soleil se reflétait sur les objets et ensuite entrait dans l'œil.
Il fut également le premier illustrer l'anatomie de l'œil avec un diagramme. Il dit qu'un objet en mouvement continue de bouger aussi longtemps qu'aucune force ne l'arrête : c'est le principe d'inertie que Galilée redécouvrira longtemps après.
On lui doit l'invention de la chambre noire, instrument optique qui permet d'obtenir une projection en deux dimensions très proche de la vision humaine.

1 Intégration sur un segment.

Exercice 1 *Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que* $\displaystyle\int_0^1 f = \frac{1}{2}$.
Montrer que f possède un point fixe sur $[0,1]$.

Exercice 2 *Soit f une fonction , continue, positive sur $[a,b]$.*
Montrer que $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\int_a^b f(x)^n dx\right)^{1/n} = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. *Interpréter ce résultat à l'aide des normes.*

Exercice 3 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On pose* $\displaystyle g(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt$. *Montrer que $g^{(n)} = f$. Penser à utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.*

Exercice 4 Sommes de Riemann.

1) Inégalité de Jensen.
Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue et $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ continue convexe.
Démontrer que $g\left(\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt\right)\leq\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b g(f(t))\,dt.$

2) Moyenne géométrique.
Soit $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue. Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}f\big(\frac{1}{n}\big)\Big)\Big(1+\frac{1}{n}f\big(\frac{2}{n}\big)\Big)\dots\Big(1+\frac{1}{n}f\big(\frac{n}{n}\big)\Big)=\exp\Big(\int_0^1 f(t)\,dt\Big)$$

On pourra utiliser : $\forall\, x\geq-\dfrac{1}{2},\ x-x^2\leq\ln x\leq x.$

3) *Déterminer les limites des suites suivantes.*

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}.$

b) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

c) $\displaystyle\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}.$

d) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{1}{n+k}}\right)-n,$
on pourra utiliser l'inégalité :
$x\leq e^x-1\leq x+\dfrac{ex^2}{2},\ \forall x\in[0,1].$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$
On pourra s'inspirer de l'exemple précédent.

f) $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dots+\dfrac{1}{kn}$
pour $k\geq 2$ fixé.

g) $\displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(n-k)}.$

h) $\displaystyle\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{k}{n}\Big)}.$

i) $\displaystyle\ln\Big(1+\frac{\pi}{n}\Big)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2+\cos(\frac{3k\pi}{n})}.$

j) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$. *Donner un équivalent simple.*

k) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}A_1A_k.$
Où $A_1,A_2,\dots,A_n$ les sommets d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de centre 0 et rayon 1.

Exercice 5 Intégrales de Wallis.

On note $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\ \underset{\cdot}{t}.$

1) *Comparer I_n et* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\ \underset{\cdot}{t}.$

2) *En coupant* $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ *en $[0,\alpha]$ et* $\left[\alpha,\dfrac{\pi}{2}\right]$, *démontrer que* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}I_n=0.$

3) *Chercher une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.*
En déduire I_{2k} et I_{2k+1} en fonction de k.

4) *Démontrer que* $nI_nI_{n-1}=\dfrac{\pi}{2}.$

5) *Montrer que la suite (I_n) est décroissante*

6) *Démontrer que $I_n\sim I_{n-1}$ et en déduire un équivalent simple de I_n*

7) *En déduire un équivalent simple de* $\begin{pmatrix}2n\\n\end{pmatrix}$ *quand $n\to\infty$.*

mamouni.myismail@gmail.com
myismail.chez.com

Exercice 6 Irrationalité de π et de e.

Soit $(p,q,n)\in\mathbb{N}^{*3}$, on pose $P_n(X)=\dfrac{X^n(qX-p)^n}{n!}$.

1) *Préciser les racines de P_n ainsi que leurs multiplicités .*
2) *Montrer que $P_n^{(k)}(0)\in\mathbb{Z},\quad \forall 0\leq k\leq 2n$.*
3) *En déduire que $P_n^{(k)}\left(\dfrac{p}{q}\right)\in\mathbb{Z},\quad \forall 0\leq k\leq 2n$.*
   Penser un changement de variable.
4) *On suppose $\pi\in\mathbb{Q}$ et on pose $\pi=\dfrac{p}{q}$.*
   a) *En déduire de ce qui précède que $\displaystyle\int_0^\pi P_n(t)\sin t dt\in\mathbb{Z}$.*
   b) *Montrer que $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^\pi P_n(t)\sin t dt=0$.*
   c) *Conclure que la suite $\left(\displaystyle\int_0^\pi P_n(t)\sin t dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est stationnaire en 0.*
   d) *Déduire une contradiction, puis conclure.*
5) *En raisonnant cette fois sur $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)e^t dt$, montrer que $e\notin\mathbb{Q}$.*

Exercice 7 Densité des fonctions en escalier

Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue telle que pour toute fonction $g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ en escalier, $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,t=0$. Démontrer que $f=0$.

Exercice 8 Lemme de Riemann-Lebesgue.

Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, montrer que : $\displaystyle\lim_{\lambda\longrightarrow+\infty}\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)dt=0$ dans les cas suivants :

1) *f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.*
2) *f en escalier sur $[a,b]$.*
3) *f continue par morceaux sur $[a,b]$*

2 Intégration sur un intervalle quelconque.

Exercice 9 *Étudier l'existence des intégrales suivantes :*

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{e^t+t^2e^{-t}}$ 2. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{e^{\sin t}}{t}\,dt$ 3. $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{t^\alpha-1}{\ln t}\,dt$

4. $\displaystyle\int_{e^2}^{+\infty}\frac{dt}{t(\ln t)(\ln\ln t)}$ 5. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\ln\Big(\frac{1+t^2}{1+t^3}\Big)\,dt$ 6. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\Big(2+(t+3)\ln\big(\frac{t+2}{t+4}\big)\Big)\,dt$

7. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}\,dt$ 8. $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{dt}{1-\sqrt{t}}$ 9. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{(t+1)^\alpha-t^\alpha}{t^\beta}\,dt$

10. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\sin(t^2)\,dt$ 11. $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{dt}{\arccos t}$ 12. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\ln(\arctan t)}{t^\alpha}\,dt$

13. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln(1+1/t)\,dt}{(t^2-1)^\alpha}$ 14. $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{|\ln t|^\beta}{(1-t)^\alpha}\,dt$ 15. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}t^\alpha\big(1-e^{-1/\sqrt{t}}\big)\,dt$

16. $\displaystyle\int_{0}^{1}\sin\big(\frac{1}{t}\big)e^{-1/t}t^{-k}\,dt$

Exercice 10 *La fonction* $f : t \longrightarrow \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{x}+\cos x}$ *est-elle intégrable sur* $[0,+\infty[$ *?*

Exercice 11 *Soient a et b dans $\mathbb{R}$. Existence de* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{|\sin ax\sin bx|}{x^2}dx$

Exercice 12 *Soient a et b deux réels. Existence et calcul de* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln x\frac{\cos ax-\cos bx}{x}dx$

Exercice 13 *Existence de* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}(1+\frac{1}{x^2})^x dx$

Exercice 14 *Soit $a>0$.*

1) *Montrer que* $t\mapsto\dfrac{\sin(t)}{e^{at}-1}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+$

2) *Montrer que* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{e^{at}-1}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{a^2n^2+1}$

3) *En déduire un équivalent de* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{e^{at}-1}dt$ *quand* $a\to+\infty$

Exercice 15 *Pour tout entier positif n, on considère* $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{e^x-1}dx.$

1) *Montrer que I_n est bien définie et déterminer la limite de I_n lorsque $n\to+\infty$.*

2) *Donner un équivalent de I_n en $+\infty$.*

Exercice 16 *Soient $a>b>0$. Existence et calcul de* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt$

Exercice 17 *Calculer l'intégrale* $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2}.$

Exercice 18 *Soient a, b deux nombres réels tels que $b < a$ et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f = l$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f = l'$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x))dx$ a un sens et la calculer.*
Application : calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{ch(a+x)ch(b+x)}$.

Exercice 19 *Soit z un nombre complexe tel que $\mid z \mid \neq 1$.*
Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{ipx}}{z - e^{ix}}dx$ existe et la calculer.

Exercice 20 *Étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes sur les intervalles cités.*

1) $f(x) = \dfrac{\ln x}{(x-1)^2}$, *sur* $]0,1[$ *et* $]1,+\infty[$.
2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - \sqrt{x}}$, *sur* $]0,1[$.
3) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^\alpha}$, *sur* $]0,+\infty[$, *o* α *paramètre rel.*
4) ***Intégrales de Bertrand.*** $f(x) = x^\alpha \left|\ln x\right|^\beta$, *sur* $]0,1[$ *et* $]1,+\infty[$, *où* α, β *paramètres réels.*
5) $f(x) = \dfrac{\ln x}{1-x}$ *et* $g(x) = \dfrac{1-x}{\ln x}$ *sur* $]0,1[$.
6) $g : x \mapsto \dfrac{\ln(x+1) - \ln 2}{x^2 - 1}$ *et* $h : x \mapsto \dfrac{\ln(x+1) - x\ln 2}{x^2-1}$.

Exercice 21 **Calcul de** $\displaystyle\int_0^\infty \sin t/t\, \underset{.}{t}$

1) *A l'aide d'une intégration par parties, montrer que* $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \underset{.}{t} = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, \underset{.}{t}$.
2) *Montrer que* $I_n = \displaystyle\int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{t^2}\, \underset{.}{t}$ *est comprise entre* $A_n = \displaystyle\int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\, \underset{.}{t}$ *et* $B_n = \displaystyle\int_{t=0}^{\pi/2} \text{cotan}^2 t \sin^2 nt\, \underset{.}{t}$.
3) *Calculer* $A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1}$ *et* $A_n - B_n$. *En déduire les valeurs de* A_n *et* B_n *en fonction de* n.
4) *Montrer que* $\dfrac{I_n}{n} - n \to \infty- > J = \displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, \underset{.}{t}$ *et donner la valeur de cette dernière intégrale.*

Exercice 22 ***Intégrale de Gauss.***

1) *Montrer que* $\ln(1+x) \leq x$, *pour tout rel* $x > -1$.
2) *En déduire que* $\left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-x} \leq \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^{-n}$, $\forall x \in [0, n[$.
3) *Montrer que,* $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ *est intégrable sur* $[0,+\infty[$, *puis en déduire que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, \underset{.}{x} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Indication : On pourra utiliser l'encadrement :
$\left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-x^2} \leq \left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)^{-n}$, *pour tout* $x \in [0, \sqrt{n}[$.
4) *en déduire la la valeur de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} t^{2n} \mathrm{d}t$.

Exercice 23 *Soit* $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *continue telle que* f^2 *intégrable. Montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 0$. *Interpréter ce résultat à l'aide de la moyenne.*

Exercice 24 ***Comparaison entre somme et intégrale.***

1) *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la fonction* $x \mapsto x^n \ln x$ *est intégrable sur* $]0,1]$, *puis calculer* $\int_0^1 x^n \ln x x.$
2) *Montrer que, la fonction* $f : x \mapsto \frac{\ln x}{1-x}$, *est borne sur* $]0,1[$ *puis intégrable.*
3) *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a :*
$\left|\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right| \leq \frac{M}{n+1}$ *o* $M = \sup\limits_{]0,1[}|f|$.
Indication : Utiliser la relation : $1 - x^n = (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} x^k$.
4) *En déduire la valeur de* $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x$.
Indication : On admet le résultat suivant : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 25 ***Étude d'une suite d'intégrales.***

1) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on pose :* $I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t$.
   a) *Donner une relation entre* I_n *et* I_{n-1}, *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.
2) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose :* $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t$.
   a) *Montrer que* J_n *est bien définie.*
   b) *Donner une relation entre* J_n *et* J_{n-1}, *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.
   c) *Exprimer* J_n *en fonction de* n, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
   d) *Donner un équivalent simple de* J_n, *quand* $n \longrightarrow +\infty$.
   On pourra utiliser la relation de Stirling :
$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$
   e) *Montrer que* $0 \leq J_n - I_n \leq \frac{\pi}{2^{n+1}}$.
   f) *En déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}I_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 26 ***Intégrales de Wallis.***

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on pose :* $w_n = \int_0^1 (1-t^2)^n\mathrm{d}t$.

1) *Donner une relation entre* w_n *et* w_{n-1}, *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.
2) *Exprimer* w_n *en fonction de* n, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
3) *Donner un équivalent simple de* w_n, *quand* $n \longrightarrow +\infty$.
On pourra utiliser la relation de Stirling : $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$
4) *En déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}w_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Exercice 27 La constante d'Euler.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

1) *Montrer que $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone borne entre 0 et 1, donc converge, on notera γ sa limite, appelée constante d'Euler.*

Indication : Penser utiliser le TAF, ou bien l'inégalité : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$, pour tout $k \geq 2$.

2) *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $J_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t \mathrm{d}t$.*

Montrer que J_n est bien définie.

On admet dans la suite que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = -\gamma$, qu'il est possible de montre l'aide d'une intégration par parties ou changement variable.

3) *On pose $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \ln x \mathrm{d}x$.*

a) *Montrer que K est bien définie.*

b) *Montrer que $\ln(1+x) \leq x$, pour tout rel $x > -1$.*

c) *En déduire que $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-x}$, pour tout $x \in [0, n[$.*

d) *Montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, on a : $x - x^2 \leq \ln(1+x)$.*

e) *En déduire que pour tout*

$$n \geq 4, t \in [0, \sqrt{n}] \quad \text{on a :} \quad t + n\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \geq -\frac{t^2}{n}$$

$$n \geq 4, t \in [0, \sqrt{n}] \quad \text{on a :} \quad -\frac{t^2}{n} \geq \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)$$

$$n \geq 4, t \in [0, n] \quad \text{on a :} \quad \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \geq \mathrm{e}^{-t}\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)$$

$$n \geq 4, t \in [0, n] \quad \text{on a :} \quad 0 \leq \mathrm{e}^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2 \mathrm{e}^{-t}}{n}$$

f) *En déduire que $K = -\gamma$.*

Fin
À la prochaine