CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ المُؤ مِنُون

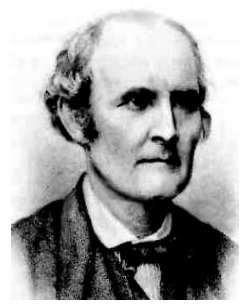
صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Feuille d'exercices: *Réduction d'endomorphismes*

6 octobre 2009

Blague du jour
Un enfant demande au juge de lui autoriser à quitter son domicile pour vivre avec son équipe nationale de foot.
- Le juge : Qui te pousse à quitter tes parents ?
- L'enfant : Car ma mère me bat quand mon père se dispute avec elle.
- Le juge : Et ton père
- L'enfant : Lui aussi me bat, quand il ne se dispute pas avec ma mère.
- Le juge : Et pourquoi exactement avec l'équipe de foot ?
- L'enfant : J'ai entendu dire qu'elle ne bat plus personne.

Personnalité du jour — ***Cayley***
Arthur Cayley (1821-1895) était un avocat-mathématicien britannique. Il fait partie des fondateurs de l'école britannique moderne de mathématiques pures. Il est le premier à introduire la multiplication des matrices, le premier à donner définition de groupe qui s'approche de la notion moderne. On lui doit aussi la découverte des octanions. Il a reçu le prix Smith, la Royal Medal et la Médaille Copley.



Remerciements : Pour Hafid Basso (casa), My Hassan Ratbi (Rabat), Michel Quercia (Paris) pour les fichiers sources en latex.

Exercice 1 **. Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E de dimension finie, λ une valeur propre de f et p_λ le projecteur sur le sous-espace propre associé parallèlement à la somme des autres sous-espaces propres. Soit P un polynôme tel que $P(\lambda) = 1$ et $P(\mu) = 0$ pour toutes les autres valeurs propres, μ, de f. Alors $p_\lambda = P(f)$.**

Exercice 2 **. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^m = I_n$.**

1) **Justifier pourquoi A est diagonalisable.**
2) **On suppose dans cette question que $(I, A, \ldots, A^{m-1})$ est libre.**
   Donner $\pi_A, \mathbf{tr}(A), \det(A)$.
3) **On suppose que dans cett question que $\mathrm{sp}(A) \subset \mathbb{R}$, montrer que A est la matrice d'une symétrie.**

Exercice 3 . **Soient E un ev de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et u un endomorphisme de E. On suppose que $u^3 = u^2, u \neq \mathrm{id}_E, u^2 \neq 0, u^2 \neq u$.**

1) **Montrer qu'une valeur propre de u ne peut être que 0 ou 1.**
2) **Montrer que 1 et 0 sont effectivement valeurs propres de u.**
3) **Montrer que u n'est diagonalisable.**
4) **Montrer que $E = \mathrm{Im}(u^2) \oplus \mathrm{Ker}(u^2)$.**
5) **Monter que $u|_F = \mathrm{id}_F$ avec $F = \mathrm{Im}(u^2)$.**

Exercice 4 . **Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente.**

Montrons que A et $2A$ sont semblables.

Pour cela on considère f un endomorphisme d'un espace vectoriel E ayant A pour matrice. On doit trouver $g \in GL(E)$ tel que $f \circ g = 2g \circ f$. Construction de g par récurrence sur $n = \dim E$.

1) **Vérifier le résultat pour $n = 0$.**
2) **On suppose que le résultat est vrai sur tout espace vectoriel de dimension $p \leq n-1$.**
   a) **Montrer $\dim f_{|\mathbf{Im}\ (f)} \leq n-1$.**
   b) **Soit $g_1 \in GL(\mathbf{Im}\ (f))$ tel que $f(g_1(x)) = 2g_1(f(x))$ pour tout $x \in \mathbf{Im}\ (f)$.**
      i. **Montrer que $E = H \oplus I \oplus K \oplus L$ où $H = \mathbf{Im}\ (f) \cap \ker(f)$, $H \oplus I = \mathbf{Im}\ (f)$ et $H \oplus K = \ker(f)$.**
      ii. **Montrer que la restriction de f à $I \oplus L$ induit un isomorphisme sur Im (f), on note φ l'isomorphisme réciproque.**
      iii. **Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ définie par :**

      $$g(h+i+k+\ell) = g_1(h+i) + k + 2\varphi(g_1(f(\ell))).$$

      Vérifier que $f \circ g = 2g \circ f$.
      iv. **Montre enfin que g est injective, puis conclure.**

Exercice 5 . ***Matrices de rang 1.***

1) **Soit $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $A = X^tY$.**
   a) **Calculer les coéfficients de A**
   b) **Montrer que rg$A = 1$.**
2) **Inversement, soit $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que rg$A = 1$.**
   a) **Montrer que $\exists X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A = X^tY$.**
   b) **Donner une base de $\ker A$.**
   c) **Dire pourquoi tr$(A) \neq 0$, puis montrer que tr(A) est une valeur propre de A.**
   d) **Donner toutes les valeurs propres de A, ainsi que la dimension de leurs sous-espaces propres.**
   e) **En déduire χ_A.**
3) **En déduire que une matrice A de rang 1, est diagonalisable si et seulement si tr$(A) = 0$.**
4) ***Application :* Soit E un ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que rg$(u) = 1$. Montrer que :**

$$u^2 = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{Im}\ u \subset \ker u \Longleftrightarrow u \text{ n'est pas diagonalisable}.$$

Exercice 6 . ***Matrices tridiagonales.***
Ce sont les matrices de la forme :

$$A_n = \begin{pmatrix} a & b & & & (0) \\ b & a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b & a & b \\ (0) & & & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

1) **Rappeler la forme générale des suites réelles vérifiant une relation de type**

$$au_{n+1} + bu_n + cu_{n-1} = 0 \quad \textbf{où } a \in \mathbb{R}^*,\ (b,c) \in \mathbb{R}^2.$$

2) **Calculer $\Delta_n = \det A_n$ (chercher une relation de récurrence).**

3) ***Applications*** **:**

   a) **Déterminer les valeurs propres de la matrice**

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & (0) \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ (0) & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

   Indication : On pourra chercher une relation de récurrence entre les χ_{A_n} et χ_{B_n}.

   b) ***Polynômes de Chebychev.*** **Soit**

$$T_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

   c) **Calculer $D_n(\theta) = \det(T_n + (2\cos\theta)I_n)$ par récurrence.**

   d) **En déduire les valeurs propres de T_n.**

   e) **Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(T_n)$, déterminer ses vecteur propres associés, $X = (x_k)_{1\le k\le n}$. On pourra Résoudre l'équation $(T_n - \lambda I_n)X = 0$, on pourra prendre $x_0 = x_{n+1} = 0$.**

   f) **Justifier pourquoi T_n est diagonalisable, puis la diagonaliser.**

Exercice 7 . ***Éléments propres d'une matrice de type (3,3).***
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1) **Vérifier que**

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + (\mathbf{tr}A)\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda + \det(A).$$

2) **Soit λ une valeur propre de A et L_1, L_2 deux lignes non proportionnelles de $A-\lambda I$ (s'il en existe).**

   a) **Calculer $L = L_1 \wedge L_2$ (produit vectoriel) et $X = {}^tL$.**

   b) **Montrer que X est vecteur propre de A pour la valeur propre λ.**

mamouni.myismail@gmail.com
myprepa.ifrance.com

Exercice 8 . ***Oral CCP.***
Soit E un espace vectoriel de dimension n et $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que p^2 est un projecteur.

1) **Quelles sont les valeurs propres éventuelles de p ?**
2) **Montrer que p est diagonalisable si et seulement si $p^3 = p$.**

Exercice 9 . ***Réduction d'une matrice à valeurs propres simples.***
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A telle que $\dim E_\lambda = 1$

1) **Justifier que rg$(A - \lambda I_n) = n - 1$.**
2) **Montrer que rg$({}^t\mathbf{com}(A - \lambda I)) = 1$.**
   Indication : On pourra utiliser la relation $B.{}^t(\mathbf{com}B) = (\det B)I_n$ pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3) **Montrer que les colonnes de ${}^t\mathbf{com}(A - \lambda I)$ engendrent E_λ.**
4) ***Application*** **: Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.**

Exercice 10 . ***Centrale MP 2000.***
On considère la matrice de $\mathcal{M}_n(()\mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} c & a & \dots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & c \end{pmatrix}$$

On pose

$$P(x) = \det(U + xI_n)$$

1) **Montrer que P est un polynôme de degré 1, de la forme $\alpha x + \beta$.**
   Indication **: Faire des opérations sur les lignes ou colonnes.**
2) **On suppose que $a \neq b$.**
   a) **Calculer $P(-a)$ et $P(-b)$, en déduire α et β**
   b) **En déduire que $\chi_A(X) = \dfrac{(-1)^n}{a-b}\left(a(X+b-c)^n - b(X+a-c)^n\right)$.**
   c) **Montrer qu'en général les valeurs propres de A sont sur un cercle.**
3) **Donner le polynôme caractéristique de A quand $a = b$.**

Exercice 11 . *Matrice compagnon.*

Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} - X^n \in \mathbb{K}_n[X]$, sa matrice compagnon est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & a_0 \\ 1 & \ddots & & a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E et φ l'endomorphisme de E de matrice M dans $\mathcal{B}$.

1) **Montrer que $\chi_M = P$.**
2) **Calculer $\varphi^k(\vec{e}_1)$ pour $0 \leq k \leq n$.**
3) **En déduire que $P(M) = 0$, sans utiliser le théorème de Hamilton-Cayley.**
4) ***Application* :**
5) a) **Montrer qu'une matrice compagnon est semblable à sa transposée.**
   b) **En déduire que pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ les matrices M et ${}^tM$ sont semblables.**

Exercice 12 . *Matrices à spectres disjoints.*

1) **Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre :**
   (a) : $\forall\ C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $AX - XB = C$.
   (b) : $\forall\ X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a $AX = XB \Longrightarrow X = 0$.
   (c) : $\chi_B(A)$ est inversible.
   (d) : A et B n'ont pas de valeur propre en commun.
2) ***Application* : Soient A, B, P trois matrices carrées complexes avec $P \neq 0$ telles que $AP = PB$. Montrer que A et B ont une valeur popre commune.**

Exercice 13 . *Endomorphismes anticomutant (Centrale MP 2003).*

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \dots, u_p$ ($p \geq 2$) des endomorphismes de E vérifiant :

$$\forall k,\ u_k^2 = -\mathrm{id}_E, \qquad \forall\ k \neq \ell,\ u_k \circ u_\ell = -u_\ell \circ u_k.$$

1) **Montrer que les u_k sont des automorphismes et qu'ils sont diagonalisables.**
2) **Montrer que n est pair.**
3) **Donner le spectre de chaque u_k.**
4) **Donner les ordres de multiplicité des valeurs propres des u_k.**
5) **Calculer $\det(u_k)$.**

Exercice 14 . *X 2004.*

Trouver tous les polynômes P vérifiant :

$$\forall\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad P(A) = 0 \Longrightarrow \mathbf{tr}(A) \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 15 . *Décomposition de Dunford.*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe deux matrices uniques D, N telles que $A = D+N$, D est diagonalisable, N est nilpotente, $DN = ND$.

Indications : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}$ tel que $\pi_u(X) = \prod_{\lambda \in^u} (X - \lambda)^{n_\lambda}$. Posons $F_\lambda = \ker(u - \lambda \mathrm{id}_E)^{n_\lambda}$ et $u_\lambda = u|_{F_\lambda}$.

Montrer que $u_\lambda = d_\lambda + v_\lambda$ où d_λ homothétie et v_λ nilpotent.

Exercice 16 . ***Centrale MP 2003.***
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in ŁE$. On considère l'application

$$\Phi_u : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ v & \longmapsto & v \circ u \end{array}$$

1) **Montrer que $\Phi_u \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.**
2) **On se propose de montrer l'équivalence suivante : (u est diagonalisable) $\Longleftrightarrow \Phi_u$ est diagonalisable)**
   a) **1ère méthode :**
      i. **Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}[X],\ v \in \mathcal{L}(E)$, on a**

      $$P(\Phi_u)(v) = v \circ P(u)$$

      ii. **En déduire que u et Φ_u ont mêmes polynômes annulateurs, puis conclure.**
   b) **2ème méthode :**
      i. **Montrer que $\lambda \in^(\Phi_u) \Longleftrightarrow u - \lambda \mathrm{id}_E$ n'est pas surjectif.**
      ii. **En déduire que $^(\Phi_u) =^(u)$.**
      iii. **Soit $\lambda \in^(u)$ et $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(\Phi_u(v) = \lambda v)$. Montrer que :**
         A. **Im** $(u - \lambda \mathrm{id}_E) \subset \ker v)$.
         B. $\ker(\Phi_u - \lambda \mathrm{id}_{ŁE})$ **est isomorphe à $\mathcal{L}H, E$ où H est un supplémentaire de Im** $(u - \lambda \mathrm{id}_E)$.
         C. $\dim(\ker(\Phi_u - \lambda \mathrm{id}_{\mathcal{L}(E)})) = \dim(E)\dim(\ker(u - \lambda \mathrm{id}_E)$
      iv. **Conclure.**

Exercice 17 . ***Crochet de Lie.***
Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul, E, on pose pour tous endomorphismes u et v :

$$[u, v] = u \circ v - v \circ u \qquad \textbf{Crochet de Lie.}$$

1) **Montrer que $(\mathcal{L}(E), +, ., [,])$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.**
2) **Montrer que l'application :** $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E)^2 & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ (u, v) & \longmapsto & [u, v] \end{array}$ **est bilinéaire symétrique.**
3) **Montrer que $\forall u, v, w \in \mathcal{L}(E)$, on a :**

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0. \qquad \textbf{identité de Jacobi.}$$

4) **Soient u, v deux endomorphisme de E tels que $[u, v] = \mathrm{id}_E$. Montrer que :**
   a) $[u^k, v] = k u^{k-1}$ **pour $k \in \mathbb{N}$.**
   b) $[P(u), v] = P'(u)$ **pour $P \in \mathbb{K}[X]$.**
   c) u **et** v **n'ont pas de polynômes minimaux.**
5) ***Oral CCP 99.***
   On suppose dans cette question que E un espace vectoriel réel de dimension finie et que $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tels que $[f, g] = \alpha f$.
   a) **Montrer pour tout entier naturel n : $[f^n, g] = \alpha n f^n$.**
   b) **Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n = 0$ (raisonner par l'absurde et considérer l'application** $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ h & \longmapsto & [h, g] \end{array}$ **.**

Exercice 18 . ***Crochet de Lie (suite).***

1) ***Oral X 2001***
On suppose dans cette question que E est de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et que f un endomorphisme de E tel que χ_f soit irréductible. On se propose de montrer que pour tout endomorphisme g, le crochet de Lie rg$[f,g] \neq 1$. Supposons qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que rg$[f,g]=1$.
   a) **Montrer qu'il existe $\varphi \in E^*$ et $a \in E$ tous deux non nuls tels que :**
   $$\forall\ x \in E, \quad \textbf{on a :} f(g(x)) - g(f(x)) = \varphi(x)a.$$
   b) **En déduire par récurrence sur k que :**
   $$\forall\ x \in E,\ f^k(g(x)) - g(f^k(x)) = \varphi(x)f^{k-1}(a) + \varphi(f(x))f^{k-2}(a) + \cdots + \varphi(f^{k-1}(x))a.$$
   c) **En déduire que : $(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a))$ est une base de E avec $n = \dim E$ et que $\exists P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $f^n(a) = P(f)$.**
   d) **En déduire que $\mu_f(X) = X^n - P(X)$.**
   e) **En déduire que $\ell(x) = 0$ pour tout $x \in E$.**
   f) **En déduire une contradiction.**

2) ***Oral Ens Cachan 2003.***
Soit $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ un automorphisme d'espace vectoriel tel que :
$$\forall\ A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \Phi([A,B]) = [\Phi(A), \Phi(B)]$$
On se propose de montrer : $\forall\ D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, D est diagonalisable *ssi* $\Phi(D)$ est diagonalisable. Pour cela considérons l'application : $\phi_D : X \longrightarrow [D,X]$ et montrons que (D est diagonalisable) $\iff$ (ϕ_D est diagonalisable).
   a) **On suppose que D est diagonalisable. Montrer alors que les applications $X \longrightarrow DX$ et $X \longrightarrow XD$ le sont aussi (annulateur scindé à racines simples) et elles commutent, donc elles sont simmultanément diagonalisables et leur différence, ϕ_D, est aussi diagonalisable.**
   b) **Réciproquement, on suppose que ϕ_D est diagonalisable.**
      i. **Montrer que si P est un polynôme quelconque de degré m, alors :**
      $$\forall\ X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ P(\phi_D)(X) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k D^k X \frac{P^{(k)}(D)}{k!} = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{P^{(k)}(D)}{k!} X D^k.$$
      ii. **Prenons P annulateur scindé à racines simples de ϕ_D, $X = U^tV$ où U est un vecteur propre de D associé à une certaine valeur propre λ et V un vecteur arbitraire. Montrer que $U^tVP(D-\lambda I$, puis que ${}^tVP(D-\lambda I) = 0$.**
      iii. **En déduire que $P(D-\lambda I) = 0$, puis conclure.**

3) **Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(()\mathbb{R})$ telles que $[A,B] = A$, montrer que A est nilpotente. Pour cela on considère l'application :**
$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(()\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(()\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & MB - BM \end{array}$$
   a) **Montrer que ψ est linéaire de E dans E.**
   b) **Montrer par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N} \quad \psi(A^k) = kA^k$.**
   c) **On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}, A^k \neq 0$. Montrer que ψ a une infinité de valeurs propres.**
   d) **Conclure.**

Exercice 19 . *Usage de la réduction.*

1) ***Résolution d'un système différentiel.***
Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.
   a) **Calculer** A^n**, pour tout** $n \in \mathbb{N}$.
   b) **Soit** $U_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ **et** (U_n) **défini par la relation :** $U_{n+1} = AU_n$**. Calculer** U_n **en fonction de** n.
   c) **Soit** $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$**. Résoudre** $X'(t) = AX(t)$.
2) ***Calcul des puissances de*** A.
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ **ayant pour valeurs propres** $1, -2, 2$ **et** $n \in \mathbb{N}$.
   a) **Montrer que** A^n **peut s'écrire sous la forme :** $A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I_3$ **avec** $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R}$.
   b) **On considère le polynôme** $P(X) = \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n$**. Montrer que :** $P(1) = 1$, $P(2) = 2^n$, $P(-2) = (-2)^n$.
   c) **En déduire les coefficients** $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$.
3) ***Suites récurrentes linéaires.***
Soit (u_n) **une suite réelle vérifiant l'équation de récurrence :** $u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$.
   a) **On pose** $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$**. Montrer qu'il existe une matrice** $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ **telle que** $X_{n+1} = AX_n$.
   b) **Diagonaliser** A**. En déduire** u_n **en fonction de** u_0, u_1, u_2 **et** n.
4) **Soient** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **et** $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **trois suites de nombres réels satisfaisant aux relations de récurrence :**

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n - x_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n - z_n \end{cases}$$

Calculer les valeurs de x_n, y_n **et** z_n **en fonction de** x_0, y_0 **et** z_0.

Exercice 20 . *Commutant d'une matrice*
Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$**, on note** $C(A)$ **le commutant de** A.

1) **Pour** $n = 2$**, montrer que** $C(A)$ **est de dimension** 2 **ou** 4**, en donner une base.**
2) **Pour** $n \in \mathbb{N}^*$ **et** A **diagonalisable, montrer que** $C(A)$ **est de dimension** $\geq n$
3) ***Cas d'une matrice à valeurs propres distinctes.***
   a) **Soit** $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ **une matrice diagonale à valeurs propres distinctes.**
   b) **Montrer qu'une matrice** M **commute avec** D **si et seulement si** M **est diagonale.**
   c) **Montrer que pour toute matrice** M **diagonale, il existe un polynôme** $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ **unique tel que** $M = P(D)$.
   d) **Soit** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **une matrice à valeurs propres distinctes. Montrer que les matrices** M **commutant avec** A **sont les polynômes en** A.

Exercice 21 . *Sous espaces stables.*

1) ***Droites et hyperplans stables.***
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
   a) Montrer qu'il existe une droite vectorielle stable par u.
   b) Montrer qu'il existe un hyperplan stable par u
   Indication : considérer **Im** $(u - \lambda \mathrm{id}_E)$ où λ est une valeur propre de u.
   c) Donner un exemple où ces propriétés sont en défaut pour un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .
2) ***Plan stable pour une valeur propre non réelle.***
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda = a + ib$ une valeur propre non réelle de M ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$). On note X un vecteur propre complexe de M.
   a) Montrer que $\overline{X}$ est aussi vecteur propre de M.
   b) Montrer que $(X, \overline{X})$ est libre dans $\mathbb{C}^n$.
   c) Soient $U = \dfrac{1}{2}(X + \overline{X})$, $V = \dfrac{1}{2i}(X - \overline{X})$.
   Montrer que (U, V) est libre dans $\mathbb{R}^n$.
   d) Soit $F = \mathrm{vect}(U, V)$. Montrer que F est stable par φ (endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à M) et donner la matrice de $\varphi_{|F}$ dans la base (U, V).
3) ***Plans stables.***
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
   a) Soit F un plan vectoriel. Montrer que si F est stable par f alors il existe $P \in \mathbb{K}_2[x]$ non nul tel que $F \subset \ker P(f)$.
   b) Réciproquement, si $P \in \mathbb{K}_2[x]$ est non nul, montrer que $\ker P(f)$ contient un plan stable par f.
   c) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ montrer que f admet toujours une droite ou un plan stable.

Exercice 22 . *Endomorphismes semi-simples.*
Un endomorphisme f est dit semi-simple si tout sous-espace stable par f admet un supplémentaire stable par f.
Montrer qu'un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie est semi-simple si et seulement s'il est diagonalisable.

Exercice 23 . *Endomorphisme cyclique.*
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ègale à n. Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit cyclique si $\exists a \in E$ tel que la famille $(f^k(a))_{k\in\mathbb{N}}$ soit une famille génératrice de E.

1) Montrer que $\forall k \geq n$, on a : $f^k(a) \in \mathbf{Vect}\left((f^k(a))_{0\leq k\leq n}\right)$.
2) Soit $P \in K[X]$ un polynôme annulateur de f, non nul. Montrer que $\deg(P) \geq n$ (raisonner par l'absurde).
3) En déduire que le polynôme minimal de f est (au signe près) le polynôme caractéristique de f.

Exercice 24 . Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, montrer que $P(u)$ est un automorphisme $\iff P \wedge \pi_u = 1$.

Exercice 25 . Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Exprimer $\chi_{A^{-1}}$ en fonction de χ_A.

Exercice 26 . *Polynôme minimal d'une vecteur.*
Soit u un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension n sur le corps $\mathbb{K}$.

1) **Soit $x \in E$, montrer que l'ensemble $\{P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u)(x) = 0_E\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ engendré par un unique polynôme unitaire, noté $\pi_{x,u}$ et appelé polynôme minimal de x en u.**
2) **Montrer que $\pi_{x,u}$ divise π_u.**
3) **Donner $\pi_{x,u}$ quand $x \in \ker u$.**
4) ***Exemple :* On suppose que u est un projecteur non nul, différent de l'identité. Rappeler son polynôme minimal, ainsi que celui de x quand $x \in$ Im u.**
5) ***Application :* On se propose de montrer l'équivalence suivante : $\{0\}$ et E sont les seuls sous-espace vectoriel de E stables par u si et seulement si χ_u est irréductible sur $\mathbb{K}$. Pour cela pour tout $x \in E$, on pose $\mathbb{K}_u[x] = \{P(u)(x)$ tel que $P \in \mathbb{K}[X]\}$, appelé sous-espace cyclique engendré par x**
   a) **On suppose que χ_u est irréductible.**
      i. **Si $x \neq 0$, montrer que $\chi_u = \pi_u = \pi_{x,u}$.**
      ii. **En déduire que $\mathbb{K}_u[x] = E$, puis conclure.**
   b) **Réciproquement.**
      i. **Soit $x \neq 0$, montrer que $\mathbb{K}_u[X] = E$.**
      ii. **Supposons qu'il existe P un diviseur non trivial de χ_u et soit $y = P(u)(x)$. Montrer que $\pi_{y,u} = \chi_u/P$, puis en déduire une contradiction.**

Exercice 27 . *Diagonalisation et trigonalisation simultanée.*
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1) **Montrer que si A et B sont diagonalisables avec $AB = BA$, alors elles sont simultanément diagonalisables (i.e, dans une même base.)**
2) **Montrer que si $AB = 0$, alors A et B sont simultanément trigonalisables.**

Exercice 28 . $\mathrm{sp}(u \circ v) = \mathrm{sp}(v \circ u)$.
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

1) **Montrer que si λ est valeur propre de $u \circ v$ alors λ est valeur propre de $v \circ u$ (on distinguera les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$).**
2) **En déduire que $^{(}u \circ v) =^{(} v \circ u)$.**

Exercice 29 . *Diagonalisation simultanée.*
Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E, qui commutent, c'est à dire tels que $u \circ v = v \circ u$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ (resp. $\mu_1, \ldots, \mu_q$) les valeurs propres de u (resp. de v), et $F_1, \ldots, F_p$ les espaces propres associés (resp. $G_1, \ldots, G_q$).

1) **Montrer que chaque G_j (resp. F_i) est stable par u (resp. v) (c'est à dire que $u(G_j) \subset G_j$).**
2) **On pose $H_{ij} = F_i \cap G_j$. Soit $i \in \{1, \ldots, p\}$. Montrer que F_i est la somme directe des espaces $(H_{ij})_{1 \leq j \leq q}$.**
3) **En déduire l'énoncé suivant :**

   Lorsque deux endomorphismes diagonalisables u et v commutent, il existe une base formée de vecteurs propres communs à u et à v (en d'autres termes, u et v sont diagonalisables simultanément dans la même base).

4) **On suppose que v admet n valeurs propres distinctes. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $u = P(v)$.**

Exercice 30 . ***Autour du noyau et de l'image.***

1) **Soit** E **un** $\mathbb{K}$**-espace vectoriel de dimension finie et** $u \in \mathcal{L}(E)$ **diagonalisable. Pour** $\lambda \in^(u)$**, on note** $E_\lambda = \ker(u - \lambda \mathrm{id}_E)$ **et** $F_\lambda = \mathbf{Im}\ (u - \lambda \mathrm{id}_E)$**. Montrer que**

$$E_\lambda \oplus F_\lambda = E.$$

2) **Soit** E **un** $\mathbb{K}$**-espace vectoriel de dimension finie et** $f \in \mathcal{L}(E)$**. On suppose qu'il existe** $P \in \mathbb{K}[X]$ **tel que** $P(f) = 0$ **et** $P'(0) \neq 0$**.**
Montrer que $\ker f^2 = \ker f$ **puis que** $\ker f \oplus \mathbf{Im}\ f = E$**.**
Indication **: Distinguez les cas** $P(0) \neq 0$ **et** $P(0) = 0$**.**

3) **Soit** E **un** $\mathbb{C}$**-espace vectoriel de dimension finie et** $f \in \mathcal{L}(E)$**. Montrer que** f **est diagonalisable si et seulement si pour tout** $\lambda \in \mathbb{C}$ **on a** $\mathbf{rg}(f - \lambda \mathrm{id}_E) = \mathbf{rg}(f - \lambda \mathrm{id}_E)^2$**.**

4) **Soit** E **un** $\mathbb{K}$**-espace vectoriel de dimension finie et** $u \in \mathcal{L}(E)$**. On se propose de ontrer que les ensembles** $\mathcal{K} = \{\ker(P(u)),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$ **et** $\mathcal{I} = \{\mathbf{Im}\ (P(u)),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$ **sont finis et ont même cardinal. Pour cela on note** μ **le polynôme minimal de** u **et** $\mathcal{D}$ **l'ensemble des diviseurs unitaires de** μ**.**

- **a)** **Pour tout** $P \in \mathbb{K}[X]$**, on pose** $d = P \wedge \mu$**.**
  Montrer que $\ker(P(u)) = \ker(d(u))$ **et** $\mathbf{Im}\ (P(u)) = \mathbf{Im}\ (d(u))$**.**
- **b)** **En déduire que** $\mathcal{K}$ **et** $\mathcal{I}$ **sont finis.**
- **c)** **Soit** $d \in \mathcal{D}$**.**
  - **i.** **Montrer que le polynôme minimal de** $u_{|\mathbf{Im}\ (d(u))}$ **est** μ/d**.**
  - **ii.** **En déduire que l'application** $d \mapsto \mathbf{Im}\ (d(u))$ **est injective sur** $\mathcal{D}$ **et que** $\mathbf{card}(\mathcal{I}) = \mathbf{card}(\mathcal{D})$**.**
  - **iii.** **Montrer que** d **le polynôme minimal de** $u_{|\ker(d(u))}$ **ainsi que** $u_{|\mathbf{Im}\ (\frac{\mu}{d}(u))}$**.**
  - **iv.** **En déduire que l'application** $d \mapsto \ker(d(u))$ **est injective sur** $\mathcal{D}$ **puis que** $\mathbf{card}(\mathcal{K}) = \mathbf{card}(\mathcal{D})$**.**

Fin
à la prochaine