CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ المُؤ مِنُون

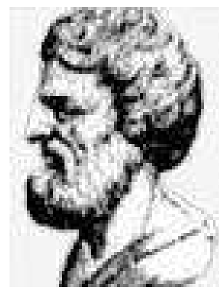
صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Feuille d'exercices: *Révision Algèbre Linéaire Programme Sup*

14 août 2009

Blague du jour
C'est un voleur qui fait son tour de prospection habituel, il voit accroché sur la porte d'une entrée d'un jardin *ATTENTION PERROQUET MÉCHANT*. Il s'éclate de rire et revient la nuit, quand il passe la barrière et pénètre dans le jardin.
Soudain, le perroquet crie : "REX, ATTAQUE ! ! ! !"

Mathématicien du jour — ***Diophante***
Diophante d'Alexandrie **(env. 200/214 - env. 284/298) était un mathématicien grec. Surtout connu pour son étude des *équations diophantiennes*, il est surnommé le *père de l'algèbre*. Peu de choses sont connues de sa vie. Il était probablement un babylonien hellène. Son oeuvre est en partie perdue. Son ouvrage le plus important est son *Arithmétique*, qui influença les mathématiciens arabes et plus tard ceux de la Renaissance.**



Exercice 1 . *Noyaux et images itérés.*

Soit E un ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On pose $N_k = \ker(f^k)$ et $I_k = \mathbf{Im}\ f^k$.

1) **Montrer que la suite (N_k) est croissante (pour l'inclusion) et que la suite (I_k) est décroissante.**
2) **Soit p tel que $N_p = N_{p+1}$. Justifier l'existence de p et montrer que $N_{p+1} = N_{p+2} = \cdots = N_{p+k} = \ldots$**
3) **Montrer que les suites (N_k) et (I_k) sont stationnaires à partir du même rang p.**
4) **Montrer que $N_p \oplus I_p = E$.**
5) **Montrer que la suite $(\dim(N_{k+1}) - \dim(N_k))$ est décroissante.**
Indication : Prendre F supplémentaire de I_k dans I_{k+1} et montrer que $I_{k+2} = I_{k+1} + f(F)$.

Exercice 2 . *Théorème de Hadamard.*

Une matrice $A = (a_i^{j-1})_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite à *diagonale strictement dominante* si elle vérifie la relation suivante :

$$|a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|, \quad \forall i \in [\![1, n]\!]$$

Montrer que de telles matrices sont toujours inversibles.
Indication **: Penser à résoudre le système linéaire $AX = 0$.**

Exercice 3 . ***Endomorphisme cyclique.***
Soit E un ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $\left(f^k(x)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ engendre E.

1) **Montrer que $\left(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\right)$ est une base de E.**
   Considérer p maximal tel que $\mathcal{F} = \left(x, \dots, f^{p-1}(x)\right)$ est libre, et prouver que $f^k(x)$ est combinaison linéaire de $\mathcal{F}$ pour tout entier $k \geq p$.
2) **Montrer que si un endomorphisme $g \in \mathcal{L}(E)$ commute avec f alors $\exists (a_k)_{0\leq n-1} \in \mathbb{R}^n$ tel que $g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$.**

Exercice 4 . ***Un peu de calcul.***

1) ***De la géométrie.***
   Dans tout l'exercice, $\mathbb{R}^3$ est muni de son repère canonique $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
   a) **Déterminer l'équation du plan π passant par $A(0,-1,2)$ et $B(-1,2,3)$ et contenant une droite parallèle à $(O, \vec{j})$.**
   b) **Déterminer la projection de D sur π parallèlement à Δ, où**
   $$D : \begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x-2y-z &= 0 \end{cases} \qquad \Delta : 6x = 2y = 3z \qquad \pi : x+3y+2z = 6.$$
   c) **On considère les deux droites**
   $$D : \begin{cases} x-z &= a \\ y+3z &= -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y+z &= 2b \\ 3x+3y+2z &= 7 \end{cases} \quad \textbf{où } a, b \in \mathbb{R}.$$
      i. **Montrer que D et D' ne sont pas parallèles.**
      ii. **Donner une CNS sur a et b pour que D et D' soient concourantes.**
      iii. **Dans ce cas, former l'équation du plan les contenant.**
2) ***Des systèmes linéaires.***
   Résoudre les systèmes linéaires suivants :

   a) $$\begin{cases} x+ay+a^2z &= a^3 \\ x+by+b^2z &= b^3 \\ x+cy+c^2z &= c^3 \end{cases}$$
   Indication **: Pensez à utiliser les relation de Newton-Viète en racines et coéfficients d'un polynôme.**

   b) $$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \cdots + \beta x_n &= y_1 \\ \beta x_1 + \alpha x_2 + \cdots + \alpha x_n &= y_2 \\ \vdots & \\ \beta x_1 + \beta x_2 + \cdots + \alpha x_n &= y_n \end{cases}$$
   Indication **: Pensez à écrire le système sous sa forme matricielle $AX = b$.**

Exercice 5 . ***CNS pour que*** $E = \textbf{Im } f + \ker f$.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E.

1) **On rappelle que si f est un projecteur, i.e, $f^2 = f$, alors**
   $$E = \textbf{Im } f \oplus \ker f \quad (1)$$
   Donner un exemple d'application linéaire qui ne vérifie pas (1).
2) **Montrer que : $\textbf{Im } f \cap \ker f = \{0_E\} \iff \ker f = \ker f^2$.**
3) **Montrer que : $E = \textbf{Im } f + \ker f \iff \textbf{Im } f = \textbf{Im } f^2$.**
4) **Donner une condition necessaire et suffisante pourque f vérifie (1).**
5) **Donner un exemple d'application linéaire qui n'est pas projecteur et qui vérifie pourtant (1).**

Exercice 6 . ***Quelques applications de la formule du rang.***

1) **Soient** E, F **deux** $\mathbb{K}$**-espace vectoriel et** $f \in \mathcal{L}(E, F)$, H **est un sous-espace vectoriel de** E **et** K **est un sous-espace vectoriel de** F**, montrer que :**
   a) **Im** $f_{|H} = f(H)$ **et** $\ker f_{|H} = \ker f \cap H$.
   b) $\dim f(H) = \dim(H) - \dim(H \cap \ker f)$.
   c) $\dim(f^{-1}(K)) = \dim(K \cap \mathbf{Im}\ f) + \dim(\ker f)$.
2) **Soit** $f \in \mathcal{L}(E)$ **telle que** $f^3 = 0$.
   a) **Montrer que** $\mathbf{rg}(f) + \mathbf{rg}(f^2) \leq \dim(E)$.
   b) **Montrer que** $2\mathbf{rg}(f^2) \leq \mathbf{rg}(f)$.
   Indication : On pourra appliquer le théorème du rang à $f_{\restriction \mathbf{Im}\ f}$.
3) **Soit** E **un ev de dimension finie et** $f, g \in \mathcal{L}(E)$. **Établir que :**
   a) $\dim \ker(f \circ g) \leq \dim \ker f \oplus \dim \ker g$.
   Indication : On pourra appliquer le théorème du rang à $f_{\restriction \mathbf{Im}\ g}$.
   b) $\dim(\mathbf{Im}\ f \cap \ker g) = \mathbf{rg}(f) - \mathbf{rg}(g \circ f)$.
   Indication : On pourra appliquer le théorème du rang à $g_{\restriction \mathbf{Im}\ f}$.
   c) $\mathbf{rg}(f) + \mathbf{rg}(g) - \dim E \leq \mathbf{rg}(f \circ g) \leq \min(\mathbf{rg}(f), \mathbf{rg}(g))$.

Exercice 7 . ***Autour du rang d'une application linéaire.***

Soient E, F **deux** $\mathbb{R}$**-espace vectoriel de dimensions finies et** $u, v : E \to F$ **linéaires.**

1) **Montrer que** $\forall \lambda \neq 0$, **on a**
$$\mathbf{Im}\ (\lambda u) = \mathbf{Im}\ u \ \textbf{et}\ \ker(\lambda u) = \ker u.$$
2) **Montrer que Im** $u + v \subset \mathbf{Im}\ u + \mathbf{Im}\ v$.
3) **En déduire que**
$$\mathbf{rg}(u + v) \leq \mathbf{rg}(u) + \mathbf{rg}(v).$$
4) **Montrer que Im** $u \cap \mathbf{Im}\ v = \{0_E\} \Longrightarrow \ker u + v = \ker u \cap \ker v$.
5) **En déduire que** $\mathbf{rg}(u + v) = \mathbf{rg}(u) + \mathbf{rg}(v)$ **si et seulement si Im** $u \cap \mathbf{Im}\ v = \{0_F\}$ **et** $\ker u + \ker v = E$.
6) **Montrer que**
$$|\mathbf{rg}(u) - \mathbf{rg}(v)| \leq \mathbf{rg}(u + v).$$

Exercice 8 . ***Endomorphismes nilpotents.***

Soit E **un** $\mathbb{K}$**-espace vectoriel , un endomorphisme** $f \in \mathcal{L}(E)$ **est dit *nilpotent* s'il existe** $p \in \mathbb{N}$ **tel que** $f^p = 0$. **Dans ce cas, l'indice de** f **est le plus petit entier** p **tel que** $f^p = 0$. **On considère** $f \in \mathcal{L}(E)$ **nilpotent d'indice** p.

1) **Soit** $u \in E \setminus \ker f^{p-1}$. **Montrer que la famille** $\left(u, f(u), \ldots, f^{p-1}(u)\right)$ **est libre.**
2) **En déduire que si** E **est de dimension finie** n, **alors** $f^n = 0$.
3) **Soit** $g \in GL(E)$ **tel que** $f \circ g = g \circ f$. **Montrer que** $f + g \in GL(E)$.
4) **On suppose que** $p = n$. **Soit** $\mathcal{B} = \left(u, f(u), \ldots, f^{n-1}(u)\right)$ **une base de** E.
   a) **Montrer que** $\exists (a_k)_{0 \leq n-1} \in \mathbb{R}^n$ **tel que** $g = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$.
   b) **Donner** $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

Exercice 9 . *Matrice de Van Der Monde et polynômes de Tchebychev.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ famille de nombres réels et

$$A = (a_i^{j-1})_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

1) **Résoudre le système linéaire suivant :**

$$\begin{cases} x_1 + a_1x_2 + \cdots + a_1^{n-1}x_n &= 0 \\ x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_2^{n-1}x_n &= 0 \\ \vdots & \\ x_1 + a_nx_2 + \cdots + a_n^{n-1}x_n &= 0 \end{cases}$$

2) **En déduire que la matrice A est inversible si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts.**
3) **On suppose A inversible, proposer une méthode pour résoudre le système $AX = Y$, puis une pour inverser A.**
4) **Application : Donner l'inverse de la matrice**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}.$$

5) **Dans la suite, on pose $V(a_1,\ldots,a_n) = \left(a_i^{j-1}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ et $P(X) = \det\left(V(a_,\ldots,a_{n-1},X\right)$.**
   a) **Montrer que $P(X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.**
   Indication : Développer le déterminant suivant la dernière ligne.
   b) **Préciser son coefficient dominant.**
   c) **Calculer $P(a_i)$.**
   d) **En déduire la décomposition en facteurs irréductibles de $P(X)$.**
   e) **Calculer le déterminant de la matrice de Van Der Monde $\left(a_i^{j-1}\right)_{1\leq i,j\leq n}$**
   f) **A quelle condition la matrice A est inversible.**
6) **On pose : $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ pour tout $x \in [-1,1]$.**
   a) **Trouver une relation de récurrence entre T_{n+1}, T_n, T_{n-1}.**
   b) **Montrer que T_n est un polynôme de degré n, préciser son coefficient dominant.**
   c) **Montrer que $T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$ pout tout réel t.**
   d) **En déduire les racines de T_n.**
7) ***Application* :**
   a) **Donner une forme factorisée du déterminant**

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos(2a) \\ 1 & \cos b & \cos(2b) \\ 1 & \cos c & \cos(2c) \end{vmatrix}$$

   b) **En déduire comment factoriser dans le cas général le déterminant de la matrice**

$$(\cos^{j-1}(a_i))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 10 . *Extraits de CNC*

1) ***Base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.***
Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on définit l'endomorphisme de E, noté $u_{i,j}$ par la relation suivante : $u_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k} e_i$
Avec $\delta_{j,k} = 1$ si $j = k$, appellé symbole de Kroeneker.
$\qquad = 0$ si $j \neq k$
On note aussi, $E_{i,j}$ la matrice carrée d'ordre n, dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne, ègal à 1.
   a) **Montrer que $(u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.**
   b) **Calculer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u_{i,j})$, en déduire que $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$**
   c) **Soit $i, j, k, l \in \{1, \ldots, n\}$ fixés, calculer pour tou $p \in \{1, \ldots, n\}$, $u_{i,j} \circ u_{k,l}(e_p)$, puis en déduire $E_{i,j}E_{k,l}$.**
   d) **Exprimer la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, dans la base $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, puis en déduire les produits $AE_{k,l}$ et $E_{k,l}A$.**
   e) ***Commutant de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.***
   Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $AM = MA$, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$.
2) ***Formes linéaires et trace sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.***
   a) **Calculer $\mathbf{Tr}(AE_{k,l})$.**
   b) **En déduire que : $\mathbf{Tr}(AM) = 0, \ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow A = 0$.**
   c) **Soit ϕ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une et une seule matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :**
   $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \phi(X) = \mathbf{Tr}(AX)$
   d) **On suppose que $\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \phi(XY) = \phi(YX)$.**
   Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :
   $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \phi(X) = \lambda \mathbf{Tr}(X)$
3) ***Commutant d'une matrice diagonale.***
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $AM = MA\}$, appelé commutant de A.
   a) **Montrer que $\mathcal{C}_A$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.**
   b) **Soit $A = \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ une matrice diagonale dont tous les λ_i sont distincts.**
      i. **Chercher $\mathcal{C}_A$.**
      ii. **Soit** $\begin{array}{rccc} \phi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & M & \longmapsto & MA - AM \end{array}$
      Montrer que Im ϕ est l'ensemble des matrices à diagonale nulle.

Exercice 11 . *Lemme de Schur.*
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Le centre de $\mathcal{L}(E)$ est :
$Z = \{f \in \mathcal{L}(E)$ **tel que** $\forall \ g \in \mathcal{L}(E), \ f \circ g = g \circ f\}$.
Autrement dit formé par les endomorphismes qui commutent avec tous les autres.

1) **Soit $f \in Z, x \in E$ tel que $(x, f(x))$ est libre, montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que $g(x) = x$ et $g \circ f(x) = -f(x)$.**
2) **En déduire que Z est l'ensemble des homothéties.**
3) **Déterminer $Z' = \{f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall \ g \in GL(E), \ f \circ g = g \circ f\}$.**

Fin
à la prochaine