CPGE My Youssef, Rabat

Feuille d'exercices: *Séries Entieres* *Fonctions holomorphes*

7 février 2010

Remerciements à Mrs Hafid Bassou (Casa), Sadik Boujaida (Rabat), Lahcen El-Hachimi (Marrakech), Michel Quercia (Dijon) et My Hassan Ratbi (Rabat) pour la source Latex de ces exercices

Blague du jour :
Bonjour, vous avez rejoint la messagerie vocale d'aide psychiatrique.
- Si vous tes dépressif, le numéro sur lequel vous appuierez est sans importance, personne ne répondra.
- Si vous êtes un compulsif à la répétition, raccrochez et recomposez.
- Si vous êtes un agressif-passif, mettez-nous en attente.
- Si vous êtes antisocial, arrachez le téléphone du mur.
- Si vous avez des difficultés d'attention, ne vous occupez pas des instructions.

Mathématicien du jour **Taylor**

Brook Taylor (1685-1731) est un éclectique homme de sciences anglais . Il s'intéressa aux mathématiques, à la musique, la peinture et la philosophie. Il ajouta aux mathématiques une nouvelle branche appelée « calcul de différences finies », inventa l'intégration par partie, et découvrit les séries appelées « développement de Taylor ».

1 Séries Entières

Exercice 1 *Trouver le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n z^n$:

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell \neq 0$.
Indication: $R = 1$.

2) (a_n) *est périodique non nulle.*
Indication: $R = 1$.

3) $a_n = \sum\limits_{d|n} d^2$.
Indication: $R = 1$.

4) $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$.
Indication: $R = \dfrac{1}{e}$.

5) $a_{2n} = a^n$, $a_{2n+1} = b^n$, $0 < a < b$.
Indication: $R = \dfrac{1}{\sqrt{b}}$.

6) $a_{n^2} = n!$, $a_k = 0$ *si* $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$.
Indication: $R = 1$.

7) $a_n = (\ln n)^{-\ln n}$.
Indication: $R = 1$.

8) $a_n = e^{\sqrt{n}}$.
Indication: $R = 1$.

9) $a_n = \dfrac{1.4.7\dots(3n-2)}{n!}$.
Indication: $R = \dfrac{1}{3}$.

10) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}^{\sqrt{n}}}$.
Indication: $R = 1$.

11) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dots + \dfrac{1}{n}\right)^{\ln n}$.
Indication: $R = 1$.

12) $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$, $a_0 = a_1 = 1$.
Indication: $R = \sqrt{2} - 1$.

13) $a_n = C_{kn}^n$.
Indication: $R = \dfrac{(k-1)^{k-1}}{k^k}$.

14) $a_n = e^{(n+1)^2} - e^{(n-1)^2}$.
Indication: $R = 0$.

15) $a_n = \displaystyle\int_{t=0}^{1} (1+t^2)^n \, dt$.
Indication: $R = \dfrac{1}{2}$, $2t \leq 1 + t^2 \leq 2$.

16) $a_n = \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}$.
Indication: $R = 1$, $a_n \sim \dfrac{\ln n}{n^2}$.

17) $a_n = \dfrac{\cos n\theta}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.
Indication: $R = 1$.

Exercice 2 **Exercices d'oral.**

1) **Oral Mines MP 2003 :** *Quel est le rayon de convergence de la série entière :* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \cos^k\Big(\frac{2k\pi}{5}+\alpha\Big)x^k$ *où* $\alpha \in \mathbb{R}$ *?*

   Indication: *La suite* $\Big(\cos\Big(\frac{2k\pi}{5}+\alpha\Big)\Big)_{k\in\mathbb{N}}$ *est périodique de période 5, donc prend au plus cinq valeurs distinctes. soit* a *celle de plus grande valeur absolue. Montrer que* $R=\dfrac{1}{|a|}$.

2) **Ensi MP 2003 :** *Rayon de convergence* R *de la série entière* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sum_{k=1}^{n}k^{-\alpha}}$ *et étude pour* $x=\pm R$.

   Indication: *Trouver un équivalent simple de* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^{-\alpha}$

Exercice 3 *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R>0$. *Déterminer les rayons de convergence des séries :*

1) $\sum a_n^2 z^n$.
   Indication: $R'=R^2$.

2) $\sum \dfrac{a_n}{n!}z^n$.
   Indication: $R'=\infty$.

3) $\sum \dfrac{n!\,a_n}{n^n}z^n$.
   Indication: $R'=eR$.

Exercice 4 *On suppose que les séries* $\sum a_{2n}z^n$ *et* $\sum a_{2n+1}z^n$ *ont pour rayons de convergence* R *et* R'. *Montrer que le rayon de convergence de* $\sum a_n z^n$ *est égal à* $\min(\sqrt{R},\sqrt{R'}\,)$.

Exercice 5 *Pour* $n\in\mathbb{N}$ *et* $x\in\mathbb{R}$ *on pose* $u_n(x)=\Big(\dfrac{x(1-x)}{2}\Big)^{4^n}$.

1) *Montrer que* $]-1,2[$ *est le domaine de convergence de la série* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)$.

2) *On développe* $u_n(x)$ *par la formule du binôme :* $u_n(x)=\displaystyle\sum_{4^n\le k\le 2.4^n}a_kx^k$. *(en convenant que les* a_k *non définis valent zéro).*

   Montrer que pour $0\le k\le 4^n$, *on a* $|a_k|\le C_{4^n}^{4^n/2}\Big/ 2^{4^n}$ *avec égalité pour* $k=4^n/2$.

   En déduire que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{k\ge1}a_kx^k$ *est égal* 1

   Que doit-on retenir de cet exercice

Exercice 6 *Développer en série entière les fonctions suivantes :*

1) $\ln(1+x+x^2)$.
   Indication: $\ln(1+x+x^2)=\ln(1-x^3)-\ln(1-x)$

2) $(x-1)\ln(x^2-5x+6)$.
   Indication: *Factoriser :* x^2-5x+6.

3) $x\ln(x+\sqrt{x^2+1}\,)$.
   Indication: *Dériver*

4) $\dfrac{x-2}{x^3-x^2-x+1}$.
   Indication: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{2n+5+3(-1)^n}{4}x^n$

5) $\dfrac{1}{1+x-2x^3}$.
   Indication: *Décomposer en éléments simples.*

6) $\dfrac{1-x}{(1+2x-x^2)^2}$.
   Indication: *Intégrer.*

7) $e^{-2x^2}\displaystyle\int_0^x e^{2t^2}\,dt$.
   Indication: *Dériver*

Exercice 7 **Développement en série entière de** $\zeta(1+x)-1/x$

1) *Vérifier que pour $x \in]0,+\infty[$ on a :* $\zeta(1+x)-\dfrac{1}{x}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n^{1+x}}-\frac{1}{x}\big(\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\big)\Big)$.

2) *Pour $p\in\mathbb{N}$ on pose* $\gamma_p=\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\Big(\frac{\ln^p(1)}{1}+\cdots+\frac{\ln^p(k)}{k}-\frac{\ln^{p+1}(k+1)}{p+1}\Big)$. *Justifier l'existence de γ_p et montrer que $|\gamma_p|\le(p/e)^p$.*

3) *Montrer alors que pour $x\in]0,1[$ on a :* $\zeta(1+x)-\dfrac{1}{x}=\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p\gamma_p}{p!}x^p$.

Exercice 8 *Calculer les sommes des séries suivantes :*

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2n-1}$.

2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n$.

Indication: $\dfrac{x+x^2}{(1-x)^3}$.

3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n^3x^n$.

Indication: $\dfrac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4}$.

4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)(n+3)}$.

Indication: $\dfrac{2(1-x^2)\ln(1-x)+x^2+2x}{4x^3}$ *(décomposer en éléments simples).*

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\cosh(na)$.

Indication: $-\dfrac{1}{2}\ln(1-2x\cosh a+x^2)$.

6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\sin^2(n\theta)}{2^n}$.

Indication: $1-\dfrac{5\cos2\theta-4}{(5-4\cos2\theta)^2}$ *(linéariser).*

7) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n+1}x^n$.

Indication: $\dfrac{2x-1}{(1-x)^2}-\dfrac{2\ln(1-x)}{x}$.

8) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$.

Indication: $\cosh\sqrt{x}$ *pour $x\ge0$ et* $\cos\sqrt{-x}$ *pour $x\le0$.*

9) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^2(n\theta)}{n!}x^{2n}$.

Indication: $\dfrac{e^{x^2}}{2}-\dfrac{e^{x^2\cos2\theta}}{2}\cos(x^2\sin2\theta)$.

10) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^5x^n}{n!}$.

Indication: $(x+15x^2+25x^3+10x^4+x^5)e^x$.

11) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

Indication: $\dfrac{e^x+2e^{-x/2}\cos(x\sqrt{3}/2)}{3}$, $(f'''=f)$.

12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}C_{2n}^{n+1}x^n$.

Indication: $\dfrac{1-\sqrt{1-4x}-2x}{2x\sqrt{1-4x}}$.

13) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_1^x\ln^n t\,t$.

Indication: $\dfrac{x^2-1}{2}$.

14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\Big)x^n$.

Indication: $-\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$.

Exercice 9 **Produit de Cauchy.**

1) *Soit (c_n) le produit de Cauchy de la suite (a_n) par la suite (b_n). Montrer que si les trois séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ et $\sum c_n$ convergent vers A,B,C, alors $C=AB$*

Indication: *considérer les séries entières $\sum a_nz^n$, $\sum b_nz^n$ et $\sum c_nz^n$ puis utiliser le principe de la continuité radiale.*

2) *Soit (c_n) le produit de Cauchy de la suite (a_n) par la suite (b_n). On suppose que la série* $A(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ *a un rayon $R>0$ et que* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{b_{n+1}}=\lambda$ *avec $|\lambda|<R$.*

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{c_n}{b_n}=A(\lambda)$.

Indication: $\dfrac{c_n}{b_n}=a_0+a_1\dfrac{b_{n-1}}{b_n}+\cdots+a_n\dfrac{b_0}{b_n}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}a_ku_{n,k}$ *puis appliquer le théorème de convergence dominée.*

Exercice 10 ***Étude sur le cercle de convergence***

1) *Pour* $x \in \mathbb{R}$ *on pose* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$.

- *a)* *Montrer que le rayon de convergence est égal à 1.*
- *b)* *Étudier la convergence de* f *pour* $x = \pm 1$.
- *c)* *Montrer que* $\lim_{\to x} 1^- f(x) = +\infty$.

2) *Soit* (a_n) *et* (b_n) *deux suites de réels strictement positifs telles que* $b_n \sim a_n$. *On suppose que le rayon de convergence de la série entière* $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *est 1 et que la série diverge pour* $x = 1$.

- *a)* *Montrer que* $\lim_{x \to 1^-} A(x) = +\infty$.
- *b)* *On pose* $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. *Montrer que* $B(x) \sim A(x)$ *pour* $x \longrightarrow 1^-$.

  Indication: *Démonstration de type Césaro.*

Exercice 11 ***Fonction de classe*** $\mathcal{C}^\infty$ ***non DSE***

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n+n^2 ix}$. *Montrer que* f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *mais n'est pas développable en série entière autour de* 0.

Indication: $|f^{(k)}(0)| = \sum_{n=0}^{\infty} n^{2k} e^{-n} \geq k^{2k} e^{-k}$ *et* $R = 0$.

Exercice 12 ***Équations différentielles.***

1) *Montrer que l'équation* $3xy' + (2-5x)y = x$ *admet une solution développable en série entière autour de* 0.

2) ***DSE de tan***

- *a)* *En utilisant la relation :* $\tan' = 1 + \tan^2$, *montrer que* $\tan^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \tan^{(k)} \tan^{(n-1-k)}$.
- *b)* *Montrer que la série de Taylor de* $\tan$ *en 0 converge absolument sur* $]-\pi/2, \pi/2[$.
- *c)* *Soit* f *la somme de la série précédente. Montrer que* $f' = 1 + f^2$ *et en déduire que* $f = \tan$.
- *d)* *Prouver que le rayon de convergence est exactement* $\pi/2$.

3) *On pose* $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

- *a)* *Montrer que* f *admet un développement en série entière au voisinage de* 0 *et préciser le rayon de convergence.*
- *b)* *Chercher une équation différentielle d'ordre 1 vérifie par* f. *En déduire les coefficients du développement en série entière de* f.
- *c)* *Donner le développement en série entière de* $\arcsin^2 x$.

Exercice 13 *On note* T_n *le nombre de partitions d'un ensemble* n *éléments.*

1) *Montrer que* $T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T_k$. *On pose* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n x^n}{n!}$

2) *Préciser le rayon de convergence, puis calculer* f'. *En déduire que* $f(x) = e^{e^x - 1}$.

Exercice 14 ***Calcul d'intégrales.***
Calculer les intégrales suivantes après avoir justifié leurs existences.

1) $\displaystyle\int_0^1 t^t\,dt$

2) $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)\,dt$

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t^2)\ln(1-t^2)}{t^2}\,dt.$

4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt.$

Exercice 15 ***Fonction ζ***

Pour $|x|<1$ on pose : $Z(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\zeta(2n)x^n$.

1) *Justifier minutieusement que* $\begin{cases} Z(x)=\displaystyle\sum_{p\geq 1}\frac{x}{p^2-x} \\ Z'(x)=\displaystyle\sum_{p\geq 1}\frac{1}{p^2-x}+\sum_{p\geq 1}\frac{x}{(p^2-x)^2} \\ Z^2(x)=\displaystyle\sum_{p\neq q}\frac{x^2}{q^2-p^2}\Big(\frac{1}{p^2-x}-\frac{1}{q^2-x}\Big)+\sum_{p\geq 1}\frac{x^2}{(p^2-x)^2}\end{cases}$

2) *Pour p fixé, montrer que* $\displaystyle\sum_{q\neq p}\frac{1}{q^2-p^2}=\frac{3}{4p^2}$.

3) *En déduire que Z vérifie l'équation différentielle :* $2xZ'(x)-2Z^2(x)+Z(x)=3x\zeta(2)$

4) *En déduire la relation de récurrence :* $\forall\ n\geq 2,\ (n+\frac{1}{2})\zeta(2n)=\displaystyle\sum_{p=1}^{n-1}\zeta(2p)\zeta(2n-2p)$.

5) *Sachant que* $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$, *en déduire $\zeta(4)$ et dire comment calculer $\zeta(2n)$, $\forall n\geq 3$.*

2 Fonctions holomorphes

Exercice 16 *Soit $f(z)=\sum a_n z^n$ une série de rayon $R>0$ telle que pour tout $z\in\overset{\circ}{D}(0,R)$ on a $f(z)\in\mathbb{R}$. Montrer que f est constante.*

Exercice 17 *Soit U un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$ et $f:U\longrightarrow\mathbb{C}$ holomorphe. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) f *est constante,*
(b) $\mathrm{Re}(f)$ *est constante,*
(c) $\mathrm{Im}(f)$ *est constante,*
(d) $\overline{f}$ *est holomorphe sur U,*
(e) $|f|$ *est constante.*

Exercice 18 *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes dans U, convergeant uniformément sur tout compact de U. On note f la limite des f_n.*

1) *On suppose que $f_n(z)\neq 0$, $\forall z\in U$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Prouver que, ou $f=0$, ou bien $f(z)\neq 0$, $\forall z\in U$.*

2) *On suppose que f_n est injective pour tout $n\in\mathbb{N}$. Montrer que f est constante ou injective.*

3) *Soit $q\in\mathbb{N}$. On suppose que l'équation $f(z)=0$ a au moins $q+1$ racines (comptées avec leur multiplicité) et que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'équation $f_n(z)=0$ a au plus q racines. Prouver que $f=0$.*

Exercice 19 *Étudier les zéros de la fonction* $f(z)=\dfrac{\pi}{1-z}$ *. Est-ce contradictoire avec le principe des zéros isolés ?*

Exercice 20 *Soit f holomorphe dans le domaine $D = \{z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R\}$ et f non constante. Nous supposons aussi que $\lim\limits_{|z|\to+\infty} f(z) < 1$ et que $|f|$ est continue sur $\overline{D}$. Montrer que :*

1) *$|f(z)|$ admet son maximum sur $C_R = \{z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = R\}$,*
2) *la fonction $M(r) = \sup\limits_{z\in C_r} |f(z)|$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]R, +\infty[$.*

Exercice 21 *Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. On suppose que $\mathrm{Re}f$ est bornée. Montrer que f est constante.*

Exercice 22 *Soit f une fonction holomorphe non constante sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$.*

1) *Montrer que si $|f|$ possède un minimum local en $a \in U$, alors $f(a) = 0$.*
2) *Utiliser ce résultat pour prouver le théorème de D'Alembert-Gauss.*

Exercice 23 *Soit U le disque unité ouvert et $f : U \longrightarrow U$ une fonction holomorphe. Montrer que si f possède deux points fixes distincts, alors $f(z) = z, \forall z \in U$.*

Exercice 24 *Soit f entière telle que $\mathrm{Ima}f(x) = 0$ et $\mathrm{Re}f(ix) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est impaire.*

Fin
À la prochaine