XM6-CPGE My Youssef

Feuille d'exosrcices

Séries de Fourier

Rabat le 3 mars 2010

Blague du jour :

Un vieux milliardaire téléphone à une conseillère : J'ai 62 ans et je veux me marier avec une jeune fille de 19 ans. Pensez-vous que j'aie plus de chance de l'amener à m'épouser si je lui dis que j'ai juste 50 ans ? La conseillère lui répond : A mon avis, vous feriez mieux de lui dire que vous approchez des 80 ans !

Mathématicien du jour **Fourier**
Joseph Fourier (1768-1830) est un mathématicien et physicien français, connu pour ses travaux sur la décomposition de fonctions périodiques en séries trigonométriques convergentes appelées séries de Fourier et leur application au problème de la propagation de la chaleur. Il participe à la Révolution, manquant de peu de se faire guillotiner, il prend part à la campagne d'Égypte de Napoléon et occupe un haut poste de diplomate

Remerciements : à Mr Karim Chaira (Mohammedia), Michel Quercia (Dijon) pour la source latex de ces exercices.

1 Espaces de Hilbert.

Exo 1 Projection sur un sous-espace.
Pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, on note F_N le sous-espace vectoriel de $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ formé des suites $(x_n)_{n\geq 0}$ telles que $\sum_{n=0}^{N} x_n = 0$.
1 - Montrer que l'application $(x_n)_{n\geq 0} \mapsto \sum_{n=0}^{N} x_n$ est linéaire continue de $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$. Que peut-on déduire sur F_N ? Conclure que $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C}) = F_N \bigoplus (F_N)^\perp$.
2 - Soit $E = \{(y_n)_{n\geq 0} \text{ ; pout tous } 1 \leq i < j \leq N \text{ on ait } y_i = y_j \text{ et } y_n = 0 \text{ pour tout } n > N\}$.
a) Montrer que l'orthogonal $E \subset (F_N)^\perp$.
b) Montrer que $E = (F_N)^\perp$ (remarquer que, pour tous $0 \leq i < j \leq N$, la suite (x_n) telle que $x_i = 1$, $x_j = -1$ et $x_n = 0$ si $n \notin \{i,j\}$, appartient à F_N).

Exo 2 Calcul de la projection.
Soit $H = \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ (espace de Hilbert réel). On note $C = \{x = (x_n)_{n\geqslant 0} \in H \text{ ; } \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \geq 0\}$.
1 - Démontrer que C est convexe fermé.
2 - Déterminer la projection sur ce convexe C.
3 - Reprendre la question précédente avec $H = \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$.

Exo 3 Calcul de la projection.
Soit $H = \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ (espace de Hilbert réel). On note $C = \{x = (x_n)_{n\geqslant 0} \in H \text{ ; } \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant 0\}$.
1 - Démontrer que C est convexe fermé.
2 - Déterminer la projection sur ce convexe C.
3 - Reprendre la question précédente avec $H = \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$.

Exo 4 Projection sur un sous-espace fermé.
Soit H un espace de Hilbert, et F un sous-espace fermé de H, non réduit à $\{0\}$. On note p la projection orthogonale de H sur F. Démontrer que :
1 - $p \circ p = p$.
2 - $\forall (x,y) \in H, < p(x), y > = < x, p(y) >$.
3 - $\|p\| = 1$.

Exo 5 Distance à un sous-espace fermé.

Soit H un espace de Hilbert, et F un sous-espace fermé de H, non réduit à $\{0\}$. On note p la projection orthogonale de H sur F. Si x est un élément de H, on appelle distance de x à F la quantité $d(x,F) = \inf(\|x-y\|\ ;\ y \in F)$.

1 - Montrer que $d(x,F) = \|x - p(x)\|$.

2 - Montrer que $d(x,F) = \max\left(\{\ |<x,z>|\ ;\ z \in F^{\perp} \text{ et } \|z\| = 1\}\right)$.

3 - On suppose dans cette question que F est un sous-espace de dimension finie, et on note $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de F.

(a) Quel résultat du cours assure l'existence d'une telle base orthonormale ?

(b) Déterminer en fonction de $e_1, \cdots, e_n$, l'expression de $p(x)$.

(c) En déduire la valeur de :

$$\inf\left(\left\{\int_0^1 |t^2 - at - b|^2 dt\ ;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}\right).$$

4 - On suppose désormais que F est un sous-espace de dimension infinie. Justifier que F possède une base hilbertienne, puis exprimer $p(x)$ en fonction de cette base.

5 - On suppose désormais que $H = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Pour n un entier fixé, on pose

$$M = \{x \in H\ ;\ \sum_{k=0}^{n} x_k = 0\}$$

Vérifier que M est un sous-espace fermé de H. Chercher un sous-espace N tel que $M \bigoplus N = H$. Donner la distance de l'élément $(1, 0, 0, \cdots)$ à M.

Exo 6 L'espace $\ell^2(I)$ et $\ell^2(\mathbb{N})$.

On rappelle que l'espace $\ell^2(I, \mathbb{C})$ est l'ensemble des familles $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I}$, indexées par I, et telles que :

$$\|x\| = \sup\left\{\left(\sum_{\alpha \in F} |x_\alpha|^2\right)^{\frac{1}{2}}\ ;\ F \subset I \text{ et } F \text{ est un ensemble fini}\right\} < +\infty.$$

Montrer que dans le cas où $I = \mathbb{N}$, on a en fait : $\|x\| = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Exo 7 Quelques suites de suites.

Dire si les suites suivantes sont convergentes dans ℓ^2, et si c'est le cas, calculer leur limite.

(i) $x(n) = (\frac{1}{n}, 0, 0, 0, \cdots)$,

(ii) $x(n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, 0, 0, \cdots)$,

(iii) $x(n) = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, 0, \cdots)$,

(iv) $x(n)_m = 1$ si $n = m$, 0 sinon,

(v) $x(n)_m = \frac{1}{m} + \frac{1}{nm^3}$,

(vi) $x(n)_m = \frac{1}{m} + \frac{1}{nm^{\frac{1}{3}}}$.

Exo 8 Compacité. Prouver que la boule unité fermée de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ n'est pas compacte.

Exo 9 Complétude.

On se propose de démontrer que l'espace $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ est complet pour la norme usuelle issue du produit scalaire, $\|x\| = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Soit $(v(n))_{n \geqslant 0}$ une suite de Cauchy d'éléments de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe donc $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que, si $n, l \geqslant N(\varepsilon)$, alors : $\|v(n) - v(l)\| \leqslant \varepsilon$.

1 - Montrer que l'on a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tous $n, l \geq N(\varepsilon)$, $|v(n)_k - v(l)_k| \leqslant \varepsilon$.

2. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} v(n)_k = v_k$ existe pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3 - Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\sum_{k \geqslant K} v(N(\varepsilon))_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon$.

4. Montrer que pour tout $L \geqslant K$, on a $\left(\sum_{L \geqslant k \geqslant K} v_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\varepsilon$.

5 - En déduire que l'on a $v \in \ell^2(\mathbb{N})$, que $\lim_{n \to +\infty} \|v(n) - v\| = 0$, et donc que l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ est complet pour la norme $\|.\|$.

Exo 10 Opérateurs de Hilbert-Schmidt.
Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie, $(e_n)_{n\geqslant 0}$, $(f_n)_{n\geqslant 0}$, $(g_n)_{n\geqslant 0}$ trois bases hilbertiennes de H, et T un opérateur linéaire continu sur H.

1 - Montrer que, dans $\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\|Te_n\|^2=\sum_{p=0}^{+\infty}\|T^*g_p\|^2$.

2 - En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\|Te_n\|^2=\sum_{n=0}^{+\infty}\|T^*f_n\|^2$.

On fixe désormais une base hilbertienne $(e_n)_{n\geqslant 0}$ de H. On dira que $T\in\mathcal{L}(H)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\|Te_n\|^2<+\infty$.

Par la question précédente, cette propriété ne dépend pas de la base hilbertienne choisie. On note $HS(H)$ l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur H, et pour $T\in HS(H)$, on note $\|T\|_2=\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\|Te_n\|^2\right)^{\frac12}$.

3 - Montrer que $\|T\|\leq\|T\|_2$, et que $HS(H)\neq\mathcal{L}(H)$.

4. Montrer que $HS(H)$ muni de la norme $\|.\|_2$ est un espace de Hilbert (on précisera le produit scalaire associé). Pour démontrer la complétude, on remarquera qu'une suite de Cauchy pour $HS(H)$ muni de $\|.\|_2$ est aussi une suite de Cauchy pour $L(H)$ muni de $\|.\|$. On rappelle que $\mathcal{L}(H)$ muni de $\|.\|$ est complet.

5 - Soit $T\in HS(H)$. On note P_n le projecteur orthogonal sur $vect(e_0,\cdots,e_n)$. Montrer que, pour tout n, $T\circ P_n\in HS(H)$ et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\|T-T\circ P_n\|_2=0$. En déduire que les opérateurs de rang fini sont denses dans $HS(H)$.

2 Séries de Fourier.

Exo 11 Calculer les coéfficients de Fourier trigonométriques des fonctions f, 2π-périodiques telles que :

1) $f(x)=\pi-|x|$ sur $]-\pi,\pi[$.

Indication: $a_0=\pi$, $a_{2p}=0$, $a_{2p+1}=\dfrac{4}{\pi(2p+1)^2}$, $b_n=0$.

2) $f(x)=\pi-x$ sur $]0,2\pi[$.

Indication: $a_n=0$, $b_n=\dfrac{2}{n}$.

3) $f(x)=x^2$ sur $]0,2\pi[$.

Indication: $a_0=\dfrac{8\pi^2}{3}$, $a_n=\dfrac{4}{n^2}$, $b_n=-\dfrac{4\pi}{n}$.

4) $f(x)=\max(0,\sin x)$.

Indication: $a_0=\dfrac{2}{\pi}$, $a_{2p}=\dfrac{-2}{\pi(4p^2-1)}$, $a_{2p+1}=0$, $b_1=\dfrac12$, $b_p=0$.

5) $f(x)=|\sin x|^3$.

Indication: $a_{2p}=\dfrac{24}{\pi(4p^2-1)(4p^2-9)}$, $a_{2p+1}=0$, $b_p=0$.

Exo 12 Soient $f,g\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ continues 2π-priodiques. On pose pour $x\in\mathbb{R}$:
$$f*g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x-t)g(t)\,dt.$$

1) Montrer que h est 2π-priodique, continue, puis que $c_n(f*g)=c_n(f)c_n(g)$.

2) Pour g fixe, montrer que l'application $f\mapsto f*g$ est linéaire, puis déterminer ses valeurs et vecteurs propres.

Exo 13 Soit f la fonction 2π-périodique telle que :
$$\forall\ x\in[-\pi,\pi[,\ \ f(x)=e^x.$$

1) Chercher le développement en série de Fourier de f.

Indication: $a_0=\dfrac{2\text{sh}\pi}{\pi}$, $a_n=\dfrac{2(-1)^n\text{sh}\pi}{\pi(1+n^2)}$, $b_n=-na_n$.

2) En déduire les sommes des séries :
$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}\ \text{ et }\ S'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

Indication: $S=\dfrac{\pi-\text{th}\pi}{2\text{th}\pi}$, $S'=\dfrac{\pi-\text{sh}\pi}{2\text{sh}\pi}$.

myismail.chez.com
mamouni.myismail@gmail.com

Exo 14

1) Donner le développement en série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie sur $]0, 2\pi[$ par
$$f(x) = e^{ax} \text{ avec } a \neq 0.$$
Indication: $c_n(f) = \dfrac{e^{2\pi a} - 1}{2\pi(a - in)}$.

2) Calculer $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{a}{a^2 + n^2}$. En déduire $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$.
Indication: Parseval + convergence dominée.

Exo 15

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, impaire et 2-périodique telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que :
$$\|f\|_\infty^2 \leq \frac{2\zeta(4)}{\pi^4}\|f''\|_2^2.$$
Indication: Décomposer f en série de Fourier, exprimer $c_n(f)$ à l'aide de $c_n(f'')$ utiliser Cauchy-Scwharz et Parseval.

Exo 16

Inégalité de Wirtinger.
Soit $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\int_{t=0}^{2\pi} f(t)\,dt = 0$ et $f(0) = f(2\pi)$.

1) Montrer que
$$\int_{t=0}^{2\pi} f^2(t)\,dt \leq \int_{t=0}^{2\pi} f'^2(t)\,dt.$$
Indication: Parseval pour f et f'.

2) Montrer qu'on a égalité si et seulement si $f(x) = a\cos x + b\sin x$.

Exo 17

Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, 2π-périodiques, continues par morceaux. On note $c_n(f)$ et $c_n(g)$ les coefficients de Fourier exponentiels de f et g. Montrer que :
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{c_n(f)}c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)\,dt.$$

Exo 18

Phénomène de Gibbs pour $\dfrac{\sin kx}{k}$
Soit $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin kx}{k}$.

1) Calculer l'abscisse, x_n, du premier maximum positif de f_n.
Indication: $\dfrac{\pi}{n+1}$.

2) Montrer que $Limn{+}\infty f_n(x_n) = \int_{t=0}^{\pi} \dfrac{\sin t}{t}\,dt$.
Indication: Somme de Riemann.

3) Interpréter

Exo 19

Noyau de Féjer
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, 2π-périodique continue, f_n sa n-ème somme de Fourier et $g_n = \dfrac{f_0 + \cdots + f_n}{n+1}$.

1) Exprimer g_n l'aide d'un produit de convolution, $g_n = f * k_n$.
Indication: $k_n(x) = \dfrac{1 - \cos((n+1)x)}{(n+1)(1 - \cos x)} = \dfrac{\sin^2((n+1)x/2)}{(n+1)\sin^2(x/2)}$.

2) Montrer que la suite (k_n) constitue une suite d'approximations de la mesure de Dirac sur $]-\pi, \pi[$, définie par : $\begin{cases} \delta(x) = 1 & \text{si } x \in]-\pi,\pi[\\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

3) En déduire que la moyenne des sommes partielles de la série de Fourier de f converge uniformément vers f *pour toute* f *continue.*

Exo 20

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

1) Montrer que $Limn{+}\infty \int_a^b f(t)\sin nt\,dt = 0$.

2) Développer en série de Fourier la fonction : $x \mapsto |\sin x|$.
Indication: $|\sin x| = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$.

3) En déduire que $\int_{t=a}^{b} f(t)|\sin nt|\,dt = \dfrac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,dt$.

Fin
À la prochaine