

CPGE My Youssef, Rabat



Feuille d'exercices: *Séries dans un Banach*

21 janvier 2010

Remerciements à Mrs Hafid Bassou (Casa), Sadik Boujaida (Rabat), Lahcen El-Hachimi (Marrakech), Michel Quercia (Dijon) et My Hassan Ratbi (Rabat) pour la source Latex de ces exercices

Blague du jour :

- Pourquoi les israéliens veulent que Netscape et Yahoo fusionnent ?

Réponse : Pour l'appeler Netanyaho

- Quelle est la différence entre Jurassic Park et Microsoft ?

Réponse : L'un est un parc de milliardaire ou des gros monstres bouffent tout se qui se trouve sur leur passage. L'autre est un film.

Personnalité du jour

Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) est un mathématicien allemand. Influent sur le plan théorique, il a apporté une contribution importante à l'analyse et à la géométrie différentielle. On lui doit entre autres les notions de Surface de Riemann, Sphère de Riemann, Intégrale de Riemann, Hypothèse de Riemann, Somme de Riemann, Théorème de représentation de Riemann, Fonction zêta de Riemann, Théorème de réarrangement de Riemann,...



1 Séries numériques

Exercice 1 Étudier la nature de la série de terme général.

Calculer sa somme (dans le cas possible)

$$1) u_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right)$$

$$2) u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$$

$$3) u_n = \frac{(-1)^n}{(\ln n)^\alpha + (-1)^n}, \text{ où } \alpha \text{ un nombre réel,}$$

$$4) u_n = \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$$

$$5) u_n = \frac{\sqrt{n} \ln(n)}{n^2 + 1} \sin(n\theta) \text{ où } \theta \in \mathbb{R} \text{ est fixe.}$$

$$6) u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \text{ où } \alpha > 1.$$

$$7) u_n = \sin(\sqrt{n^2 + a^2}\pi) \text{ avec } a \text{ un réel positif donné.}$$

$$8) u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}} dx.$$

$$9) u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}, \text{ où } \alpha, \beta \text{ deux nombres réels tels que } \alpha \neq \beta.$$

$$10) u_n = \frac{(-1)^n}{\sin(n) + \sqrt{n}}$$

$$11) u_n = \ln\left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right), \text{ où } a \text{ réel positif.}$$

$$12) u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$13) u_n = e^{-\sqrt{n}}$$

$$14) u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^n}$$

Exercice 2 Calcul de sommes

Calculer les sommes des séries suivantes :

1) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 - 1}$.

Réponse: $\frac{3}{4}$.

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Réponse: $\frac{1}{4}$.

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)\dots(k+p)}$.

Réponse: $S_p - (p+1)S_{p+1} = S_p - \frac{1}{(p+1)!} \Rightarrow S_p = \frac{1}{pp!}$.

4) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^3 + 8k^2 + 17k + 10}$.

Réponse: $\frac{23}{144}$.

5) $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{2}{k(k+3)}\right)$.

Réponse: $\ln 3$.

6) $\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

Réponse: $-\ln 2$.

7) $\sum_{k=0}^{\infty} \ln\left(\cos \frac{\alpha}{2^k}\right)$.

Réponse: $\ln\left(\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$.

8) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \tan(2^{-k}\alpha)$.

Réponse: $\frac{1}{\alpha} - 2\cotan(2\alpha)$.

9) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k^3 - 3k^2 + 1}{(k+3)!}$.

Réponse: $109 - 40e$.

10) $\sum_{n=p}^{\infty} C_n^p x^n$.

Réponse: $\frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}$ pour $|x| < 1$ par récurrence.

11) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(1-x^k)(1-x^{k+1})}$.

Réponse: $\frac{x}{(1-x)^2}$ si $|x| < 1$, $\frac{1}{(1-x)^2}$ si $|x| > 1$.

12) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k - n[k/n]}{k(k+1)}$.

Réponse: $S_n = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{r}{(qn+r)(qn+r+1)} =$

$\sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{r}{qn+r} - \frac{r}{qn+r+1}$.

$S_n = \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{1}{qn+1} + \frac{1}{qn+2} + \dots + \frac{1}{qn+n} - \frac{1}{q+1} \right) =$

$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{(N+1)n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k} \right) = \ln n$.

Exercice 3 On considère les deux suites a et b définies par $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geq 0$:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}$$

1) Montrer que a converge vers une limite l que l'on explicitera

2) On pose $u_n = a_n - b_n$.

a) Majorer u_{n+1} en fonction de u_n . En déduire la vitesse de convergence de u .

b) Nature de la série $\sum_n (a_n - l)$

Exercice 4 Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ existe et donner sa valeur. Que dire de

$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$?

Exercice 5 On pose $u_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

- 1) Montrer que $\sum_{n \geq 2} v_n$ converge.
- 2) En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ tel que $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$.
- 3) A l'aide des intégrales de Wallis, Déterminer C .

Exercice 6 On pose $R_k = \sum_{n \geq k+1} \frac{(-1)^n}{n}$

- 1) Justifier l'existence de R_k .
- 2) Étudier la convergence absolue de la série $\sum_{k \geq 1} R_k$.
- 3) Quel est le signe de R_k ? Étudier la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} R_k$.

Exercice 7 Soient a, b, c trois nombres entiers positifs et z un nombre complexe de module strictement inférieur 1. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{cn}}{1 - z^{an+b}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{bn}}{1 - z^{an+c}}$.

Exercice 8 Pour $s \in \mathbb{R}$, posons $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ et $\zeta_a(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$. Soient $2 = p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots$ la suite des nombres premiers.

- 1) Exprimer $\zeta_a(s)$ en fonction de $\zeta(s)$ pour $s > 1$.
- 2) Donner un développement asymptotique deux termes de $\zeta(s)$ lorsque $s \rightarrow 1^+$.
- 3) Montrer que $\forall s > 1, \zeta(s) = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - p_n^{-s})^{-1}$.
- 4) Pour $s > 1$, la série $\sum_{n \geq 1} p_n^{-s}$ est-elle convergente? La série $\sum_{n \geq 1} p_n^{-1}$ est-elle convergente?

Exercice 9 .

- 1) Montrer qu'il existe un rel A tel que $\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2} \ln^2(n) + A + o(1)$.
- 2) En déduire qu'il existe un rel C tel que $\prod_{k=1}^n k^{\frac{1}{k}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C n^{\frac{\ln(n)}{2}}$

Exercice 10 Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!(n+1)}$

Exercice 11 .

- 1) Montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$ (on pourra calculer $\int_0^1 t^{2k} dt$)
- 2) Nature de la série $\sum_{n \geq 1} \ln\left(\tan\left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}\right)\right)$

Exercice 12 Soit $\alpha > 0$, on pose $R_n = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p^\alpha}$.

Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} R_n$ lorsque $\alpha \geq 1$ puis lorsque $0 < \alpha < 1$.

Exercice 13 On considère la suite x définie par $x_{n+1} = 2x_n + \sqrt{x_n}$ avec $x_0 > 0$.

- 1) Déterminer la limite de x .
- 2) Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\sqrt{x_n}}$.
- 3) Déterminer un équivalent de x_n lorsque $n \rightarrow +\infty$ (on pourra introduire $v_n = \ln x_n$)

Exercice 14 Soient deux entiers $p, q > 0$. On pose $u_n = \frac{p(p+1) \cdots (p+n-1)}{q(q+1) \cdots (q+n-1)}$.

- 1) Montrer que : $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow p+1 < q$
- 2) Montrer que dans ce cas $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{q-1}{q-p-1}$

Exercice 15 Soit un réel $\beta > 0$. On considère la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n+\beta}$. On note S_n les sommes partielles de cette dernière.

- 1) Montrer que $S_n = \int_0^1 \frac{t^{\beta-1}}{1+t} dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+\beta}}{1+t} dt$
- 2) Montrer que la série $\sum u_n$ converge et que sa somme est $\int_0^1 \frac{t^{\beta-1}}{1+t} dt$
- 3) Traiter les cas où $\beta = 1, 1/2, 1/3$. Donner la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

Exercice 16 Soit $s > 1$. Exprimer après avoir justifié son existence, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^s}$ en fonction de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$

Exercice 17 On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

- 1) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f atteint un et un seul extremum local sur $]n\pi, (n+1)\pi[$ en un point qu'on notera a_n . On pose en outre $m_n = f(a_n)$.
- 2) Montrer que $a_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \theta_n$ où θ_n tend vers 0 en décroissant.
- 3) Montrer que la série $\sum m_n$ converge.

Exercice 18 Soit un réel $a > 1$, $d(n)$ désignera le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de l'entier n . Étudier la série $\sum a^{d(n)}$

Exercice 19 Convergence et calcul de $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} E(\log_2(n))$

Exercice 20 Soit $s > 1$. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{sE(x)}{x^{s+1}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que : $\int_1^{+\infty} f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$

Exercice 21 On pose $A_n = 1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}$.

1) Montrer en utilisant la croissance de la racine carrée que : $A_n = \frac{2}{3}n^{3/2} + O(\sqrt{n})$.

2) Utiliser la concavité de la racine carrée pour montrer que :

$$\sqrt{n} \leq \int_{n-1/2}^{n+1/2} \sqrt{t} dt \quad \text{et} \quad \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \leq 2 \int_n^{n+1} \sqrt{t} dt$$

3) En déduire que $A_n = \frac{2}{3}n^{3/2} + \frac{1}{2}\sqrt{n} + O(1)$

Exercice 22 Soient $\sum u_n$ une série de nombres complexes dont la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ est bornée et $(a_n)_n$ une suite réelle décroissante et convergente vers 0.

En utilisant la relation, dite transformation d'Abel :

$$\sum_{k=m}^n a_k u_k = a_{n+1} S_n - a_m S_{m-1} - \sum_{k=m}^n (a_{k+1} - a_k) S_k$$

montrer que la série $\sum a_n u_n$ est convergente.

Application : Étudier la convergence de la série $\sum \frac{e^{ian}}{n^\alpha}$ où $a, \alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 23 Règle de Raabe-Duhamel

Soit une suite réelle (a_n) termes strictement positifs. On suppose que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{s}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

1) En considérant la suite $b_n = \ln\left(\frac{(n+1)^s u_{n+1}}{n^s u_n}\right)$, montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $u_n \sim \frac{k}{n^s}$

2) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour la convergence de $\sum u_n$

Exemple : étudier la série de terme général $u_n = \frac{\binom{n}{2n}}{2^{2n}}$

Exercice 24 Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

1) Montrer que pour toute matrice inversible $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, $e^{PAP^{-1}} = Pe^A P^{-1}$

2) Montrer que $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$

3) Justifier que ce dernier résultat reste valable dans le cas où A est une matrice réelle.

Exercice 25 Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

1) On suppose que A est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$. Soit P un polynôme vérifiant : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, P(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$.

Justifier l'existence d'un tel polynôme.

Montrer que $e^A = P(A)$.

2) A tant quelconque, montrer qu'il existe un polynôme P tel que $e^A = P(A)$.

Exercice 26 Soit E l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme

$\|\cdot\|_\infty$. Pour tout $f \in E$ on pose $T(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} f(1/n)$

1) Montrer que T définit une forme linéaire continue de E . Calculer sa norme et montrer qu'elle n'est pas atteinte.

2) On considère l'hyperplan affine H de E d'équation : $T(f) = 1$. Montrer que $d(0, H)$ n'est pas atteinte dans H .

Exercice 27 $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est muni d'une norme d'algèbre $\|\cdot\|$.

- 1) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $\|A\| < 1$, montrer que la série $\sum (-1)^n A^n$ converge et donner sa somme.
- 2) Montrer que $GL_p(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

Exercice 28 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum u_n$ soit convergente mais non absolument convergente. On veut montrer que pour tout réel x il existe une suite (ε_n) valeurs dans

$\{-1, 1\}$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n = x$

- 1) a) On pose $v_n = |u_n|$, Construire une suite (α_n) valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |S_{n+1}| \leq \max(|S_n|, v_{n+1}) \quad \text{où } S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k v_k$$

- b) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n v_n = 0$

- 2) Conclure

Exercice 29

Calculer les sommes de séries suivantes après en avoir prouvé la convergence :

- 1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$;
- 2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$;
- 3) $\sum u_n$ où $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$, et $0 < a < b$; il faut déterminer a et b pour que la série converge ;
- 4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2}) \dots (1+\sqrt{n})}$.

Exercice 30

Soit $(a_n)_n$ une suite de réels strictement positifs telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^n = a > 0$.

Étudier la série $\sum_n \frac{1-a_n}{n}$.

Exercice 31

On se donne $p \in \mathbb{R}_+^*$. Nature de la série du terme général :

$$u_n = n^\alpha \sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{\ln(k+p)}$$

Exercice 32

Nature des séries de termes général :

- 1) $I_n = \int_n^{+\infty} \frac{e^{n-x}}{n+x} dx$.
- 2) $J_n = (-1)^n \int_0^1 \cos(nt^2) dt$

Exercice 33

Soit f de classe C^1 sur l'intervalle $[0, a]$, ($a \geq 1$). On suppose que f n'est pas identiquement nulle au voisinage de a .

Étudier la convergence de $\sum u_n$, où $u_n = \int_0^a t^n f(t) dt$.

Exercice 34

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $\frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = \frac{n+1}{n}$. Déterminer

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$, et la nature de la série $\sum x_n$.

Exercice 35

Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on note $r_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$. Étude de la série $\sum r_n$.

Exercice 36

On pose $A_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $B_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

Nature de la série $A_n B_n - 1$.

Exercice 37

On définit la suite (u_n) de réels par u_0 et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_n^2)$.

- 1) Pour quelles valeurs de u_0 la série de terme général u_n converge-t-elle ?
- 2) Montrer que, dans ce cas, si la suite $(2^n u_n)$ n'est pas la suite nulle, elle converge vers une limite $l \neq 0$. Trouver alors un développement asymptotique deux termes de u_n .

Exercice 38

Soit f une application continue de $[0, a]$ dans lui-même admettant un développement limité $f(x) = x - \lambda x^\alpha + o(x^\alpha)$ droite de 0, avec $\lambda > 0$ et $\alpha > 1$.

Pour simplifier, nous supposons que, pour tout $x > 0$, $0 < f(x) < x$ (ce qui est de toute manière vraie localement droite de 0).

On considère la suite définie par : $u_0 > 0$ et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = f(u_n)$.

- 1) Montrer que (u_n) tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.
Donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$. On pourra chercher un réel β tel que la suite de terme général $v_n = u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ ait une limite non nulle.
- 2) Pour quelles valeurs de λ, α et γ la série $\sum n^\gamma u_n$ converge-t-elle ?
- 3) Application numérique : nature de la série $\sum u_n$ où $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$, et $u_{n+1} = \sin(u_n)$

Exercice 39

Soit une série terme général u_n positif, divergente, de somme partielle S_n , avec $u_0 > 0$. Étudier, pour $\alpha > 0$, la nature de la série $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$.

Exercice 40 Cauchy-Schwarz. Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites réelles telles que $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent.

- 1) Montrer que $\sum u_n v_n$ converge.
- 2) Montrer que $\sum (u_n + v_n)^2$ converge et : $\sqrt{\sum (u_n + v_n)^2} \leq \sqrt{\sum u_n^2} + \sqrt{\sum v_n^2}$.

Exercice 41 Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on pose $b_n = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n C_n^k a_k$

1) Montrer que la convergence de la suite (a_n) entraîne celle de (b_n) .

2) Montrer que la convergence de la série $\sum a_n$ donne celle de $\sum b_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

3) indication : vérifier que $B_n = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n C_{n+1}^{k+1} A_k$ (A_n, B_n les sommes partielles de (a_n) et (b_n))

2 Familles sommables

Exercice 42 Étudier la sommabilité dans les cas suivants :

$$1) \sum_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(i+j)^\alpha}$$

Réponse: Regroupement $i+j$ constant \implies CV ssi $\alpha > 2$.

$$2) \sum_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{i^\alpha + j^\alpha}$$

Réponse: Pour $\alpha \geq 1$ on a par convexité : $2^{1-\alpha}(i+j)^\alpha \leq i^\alpha + j^\alpha \leq (i+j)^\alpha$ donc il y a convergence ssi $\alpha > 2$.

$$3) \sum_{x \in \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[} \frac{1}{x^2}$$

Réponse: Il y a une infinité de termes supérieurs $1/4$.

$$4) \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{a^p + b^q}, a > 1, b > 1.$$

Réponse: $\frac{1}{a^p + b^q} \leq \frac{1}{2\sqrt{a^p}\sqrt{b^q}} \implies$ sommable.

Exercice 43 Série des restes.

$$1) \text{ Calculer } \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

Réponse: $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{k!} = 2e$.

$$2) \text{ Calculer } \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=p}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{q^3} \text{ en fonction de } \zeta(3).$$

Réponse: $-\frac{7}{8}\zeta(3)$.

Exercice 44 On pose $a_{n,p} = \frac{1}{n^2 - p^2}$ si $n \neq p$ et $a_{n,n} = 0$.

1) Expliquer simplement pourquoi la suite double $(a_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable.

Indication : Étudier $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,n-1}$

$$2) \text{ Calculer } \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \text{ et } \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,p}.$$

Réponse: $\sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} = \frac{1}{4n^2}$ si $n \neq 0$, $-\frac{\pi^2}{6}$ si $n = 0$. $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} = -\frac{\pi^2}{8} = -\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,p}$.

Exercice 45 Soit $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < 1$. Montrer que : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{1-x^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}}$.

Exercice 46 La fonction ζ de Riemann est définie pour tous réel $x > 1$ par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Calculer les sommes suivantes :

$$1) A = \sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^2 q^2}$$

Réponse: $A = \zeta(2)^2$

$$2) B = \sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2, p|q} \frac{1}{p^2 q^2}$$

Réponse: $B = \zeta(2)\zeta(4)$.

$$3) C = \sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2, p \wedge q = 1} \frac{1}{p^2 q^2}$$

Réponse: $C = A/\zeta(4) = 5/2$.

Exercice 47 Série harmonique alternée.

On réordonne les termes de la série harmonique alterne en prenant tour tour p termes positifs puis q termes négatifs, $p, q \geq 1$. Calculer la somme de la série correspondante.

Réponse: $\ln 2 + \frac{1}{2} \ln(p/q)$.

Exercice 48 La fonction dzêta de Riemann

La fonction ζ de Riemann est définie pour tous réel $x > 1$ par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Pour tout entier naturel n on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers naturels plus petits que n et premiers avec n .

1) Montrer que $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$

2) Montrer que pour tous rel $x > 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^x} = \frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)}$$

3) Soit u définie par $u_{p,q} = \frac{1}{p^q}$ pour tout $p \geq 2$ et $q \geq 2$.

a) Montrer que la suite u est sommable et calculer sa somme.

b) Prouver l'identité suivante : $\sum_{q=2}^{+\infty} (\zeta(q) - 1) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^q} - 1 \right) = 1$.

Exercice 49 Familles de carrés sommables

1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Vérifier que : $\int_{t=-1}^1 P(t) dt + i \int_{\theta=0}^{\pi} P(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta = 0$.

En déduire : $\int_{t=0}^1 P^2(t) dt \leq \frac{1}{2} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta$.

2) Soient $2n$ réels positifs $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$.

Montrer que $\sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \frac{a_k b_\ell}{k + \ell} \leq \pi \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{\ell=1}^n b_\ell^2}$.

3) Soient $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(b_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ deux suites complexes de carrés sommables.

Montrer que la suite double $\left(\frac{a_k b_\ell}{k + \ell} \right)_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.

Fin
À la prochaine