CPGE My Youssef, Rabat

Feuille d'exercices: *Séries dans un Banach*

1er février 2010

Remerciements à Mrs Hafid Bassou (Casa), Sadik Boujaida (Rabat), Michel Quercia (Dijon) et My Hassan Ratbi (Rabat) pour la source Latex de ces exercices

Blague du jour :
C'est deux chiens qui discutent. Il Y en a un qui demande à l'autre :
- C'est quoi ton nom ? C'est ché.
- Ché ? C'est plutôt bizarre ?... Ben oui, mon maître me dit tout le temps "Va, cher Ché !".

Personnalité du jour **Lebesgue**
Henri-Léon Lebesgue (1875-1941) est un mathématicien français. Il est reconnu pour avoir révolutionné la théorie d'intégration

Exercice 1 **Étude de convergence.**

1) *Étudier la convergence simple et uniforme de la suite (f_n) dans les cas suivant :*
   a) $f_n(x) = x^n(1-x)^n, \qquad I = [0,1]$.
   b) $f_n(x) = nx^n(1-x^2), \qquad I = [0,1]$.
   c) $f_n(x) = (\sin x)^n, \qquad I = [0, \frac{\pi}{2}]$.
   d) $f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}, I = \mathbb{R}_+$
2) *Étudier la convergence simple et uniforme sur tout compact de la suite de fonctions :* $f_n : x \mapsto \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^{-n}$.
3) *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$ *pour* $x \in [0,1]$.
   a) *Montrer que* $\forall r \in]0,1[$, *on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} nr^n = 0$.
   b) *Trouver la limite simple des fonctions* f_n.
   c) *Étudier les variations sur* $\mathbb{R}$ *de chaque fonction* f_n.
   d) *Y a-t-il convergence uniforme ?*
4) *On pose* $f_n(x) = x^n(1-x)$ *et* $g_n(x) = x^n \sin(\pi x)$.
   a) *Montrer que la suite* (f_n) *converge uniformément vers la fonction nulle sur* $[0,1]$.
   b) *En déduire qu'il en est de même pour la suite* (g_n).
   (On utilisera la concavité de sinus sur $[0,\pi]$*)*

Exercice 2 *Soient* $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *des fonctions continues convergeant vers une fonction continue* f *et* (x_n) *une suite d'éléments de* I *convergeant vers* $x \in I$, *où* I *intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$.

1) *Si les fonctions* f_n *convergent uniformément, montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x)$.
2) *Donner un contre-exemple lorsqu'il y a seulement convergence simple.*

Exercice 3 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que pour tout entier k on a $\int_a^b f(t)t^k\,dt = 0$. Montrer $f = 0$ sur $[a,b]$.*

Exercice 4 ***Convergence et composée.***

1) *Soit f_n convergeant uniformément vers f, et g une fonction continue. Démontrer que $g \circ f_n$ converge uniformément vers $g \circ f$*
2) *Soit $f_n : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ et $g_n : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues convergeant uniformément vers les fonctions f et g. Montrer que $g_n \circ f_n$ converge uniformément vers $g \circ f$.*

Exercice 5 *Soit $p \in \mathbb{N}$ fixe et (P_n) une suite de fonctions polynomiales toutes de degrés inférieurs ou égaux p convergeant simplement vers f sur un intervalle $[a,b]$.*

1) *Démontrer que f est polynomiale de degré inférieur ou égal à p, et que les coefficients des P_n convergent vers ceux de f.*
2) *Montrer que la convergence est uniforme.*

Exercice 6 ***Théorèmes de Dini***
Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction continue f.

1) *On suppose que chaque fonction f_n est croissante. Montrer qu'il y a convergence uniforme.*
2) *On suppose que pour tout x fixé, la suite $(f_n(x))$ est croissante. Montrer qu'il y a convergence uniforme.*

Exercice 7 ***Théorème d'Ascoli***
Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers f. On suppose que toutes les fonctions f_n sont k-Lipschitziennes (avec le même k).

1) *Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_N)$ une subdivision régulière de $[a,b]$. On note $M_n = \max\{|f_n(a_i) - f(a_i)| \text{ tq } 0 \leq i \leq N\}$. Encadrer $\|f_n - f\|_\infty$ l'aide de M_n.*
2) *Montrer que f_n converge uniformément vers f.*

Exercice 8 *Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction f sur un intervalle I. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :*

1) *Si les f_n sont croissantes, alors f aussi.*
2) *Si les f_n sont strictement croissantes, alors f aussi.*
3) *Si les f_n sont périodiques, alors f aussi.*
4) *Si les f_n sont continues en a, alors f aussi.*

Exercice 9 *Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de :*

1) $f_n(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$ *sur* $]-1,1[$, *puis sur* $[-a,a]$ *avec* $0 \leq a < 1$.
2) $f_n(x) = nx^n \ln(x)$, $f_n(0) = 0$, *sur* $[0,1]$.
3) $f_n(x) = e^{-nx}\sin(2nx)$ *sur* $\mathbb{R}^+$ *puis sur* $[a,+\infty[$.
4) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n\sqrt{x}}$ *sur* $\mathbb{R}_+$.
5) $f_n(x) = n\sin(x)(\cos x)^n$.
6) $f_n(t) = \dfrac{2^n t}{1 + n2^n t^2}$ *sur* $\mathbb{R}_+$.
7) $f_n(t) = \dfrac{\sin^2(nt)}{n\sin^2(t)}$ *sur* $[0;\pi]$.

Exercice 10 *Soit $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues convexes convergeant simplement vers une fonction continue f. Montrer que la convergence est uniforme.*
Indication : Prendre une subdivision régulière de $[a,b]$ et encadrer f_n par les cordes associées.

Exercice 11 *Soit $(u_n)_n$ la suite de fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par : $u_0(x) = x$ pour tout réel x strictement positif.*
$u_n(x) = \frac{2\sqrt{u_n(x)}}{1+u_n(x)}$ pour tout entier naturel n , pour tout rel x strictement positif.

1) *Étude de la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 0}$:*

a) *Soit $u : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & u(x)=1 \end{array}$ Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers u sur $]0,+\infty[$ et que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, 0 < u_n(x) \leqslant 1$*

b) *Soit (U_n) la suite de fonctions définies pour tout entier naturel n sur $]0,+\infty[$ par : $U_n = \frac{1}{u_n}$.*

i. *Montrer que : $U_n = \frac{1+U_n(x)}{2\sqrt{U_n(x)}}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0,+\infty[$.*

ii. *En déduire que : $|U_{n+1} - 1| \leqslant \frac{1}{2}|U_n(x) - 1|, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0,+\infty[$.*

iii. *Montrer que la suite de fonctions (U_n) converge simplement vers u sur $]0,+\infty[$ et que la suite de fonctions (U_n) converge uniformément vers u sur tout compact de $]0,+\infty[$.*

iv. *En déduire que la suite de fonctions (u_n) converge uniformément vers u sur tout compact de .*

2) *Soit (v_n) la suite de fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0,+\infty[, \begin{cases} v_0(x) = 1 \\ v_n(x) = v_n(x)\frac{1+v_n(x)}{2} \end{cases}$$

a) *Soit x un rel strictement positif Montrer que les suites $(u_n(x)v_n(x))_n$ et $(v_n(x))_n$ sont adjacentes.*

On définit alors : f : $\begin{array}{cl}]0,+\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n(x) \end{array}$.

b) *Montrer que les suites de fonctions $(u_nv_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent uniformément vers f sur tout compact de $]0,+\infty[$.*

c) *En déduire que f est continue sur $]0,+\infty[$.*

Exercice 12 *Soit $f_n(x) = e^{\frac{(n-1)x}{n}}$.*

1) *Étudier la convergence simple de (f_n).*

2) *Montrer que la convergence est uniforme sur tout intervalle $]-\infty, b]$.*

3) *La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?*

Exercice 13 *Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite (f_n) de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par : $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ pour $x \in [0,n]$, et 0 ailleurs.*

Exercice 14 *Pour $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = \dfrac{x}{n^2+x^2}$.*

1) *Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, mais que la convergence n'y est pas uniforme.*

2) *Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$, mais que la convergence n'est pas normale.*

Exercice 15 *Pour $x > -1$, on pose $u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.*

1) *Montrer que u est définie et continue sur $]-1, +\infty[$.*

2) *Donner son sens de variations.*

Exercice 16 *Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} f_n$, avec $f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$. On note S sa somme.*

1) *Étudier la convergence simple, normale, uniforme de cette série sur $[0, +\infty[$.*

2) *Montrer que S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.*

3) *Montrer que S n'est pas dérivable droite en 0.*

4) *Montrer que, pour tout k, $S(x) = o(x^{-k})$ en $+\infty$.*

Exercice 17 *On pose $u_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$.*

1) *Étudier la convergence simple de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.*

2) *Étudier la convergence uniforme de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ sur tout compact*

3) *Étudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.*

Exercice 18 *On pose $u_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n e^{-x} 1_{[0;n]}(x)$. Étudier les différents types de convergence de cette suite.*

Exercice 19 *Étudier la suite de fonctions définies de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ par* $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x(1+nx)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 20 *Étudier la convergence de la suite de fonctions définies sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par :*
$f_0(x) = x$ *et* $f_n(x) = sin(f_{n-1}(x))$.

Exercice 21 *On pose $u_n(x) = x^{2n} \ln x$ pour tout $x \in [0, 1]$.*

1) *Étudier la convergence simple de la série de terme général u_n et calculer la somme de cette série.*

a) *Étudier la convergence uniforme de cette série.*

b) *Montrer l'intégrabilité terme terme sur $[0, 1]$ de cette série et obtenir une égalité remarquable.*

Exercice 22 *Effectuer l'étude complète de la fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.*

Exercice 23 *considérons les fonctions $R_k(x) = \sum_{n\geq k+1} \frac{(-1)^n}{n+x}$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} R_k(x)$.*

1) *Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^-$.*

2) *Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+$ (monotonie, limite en $+\infty$ et 0 ainsi qu'un équivalent en 0 de f).*

3) *Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$.*

Exercice 24 *Soit a un nombre rel strictement positif et f la fonction définie par* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+a}$.

1) *Déterminer le domaine définition $\mathcal{D}_f$ de f.*
2) *Déterminer une autre expression de f l'aide de fonctions élémentaires*

Exercice 25 *On pose* $u_n(x) = \frac{(-1)^n n}{n^2+x^2}$.

1) *Étudier la convergence simple de la série de terme général u_n.*
2) *Montrer que la convergence uniforme de la série de terme général u_n sur tout segment $[-a,a]$. Qu'en déduit-on ?*
3) *Étudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la série de terme général u_n.*

Exercice 26 *On pose* $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$

Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ puis que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{C}{x}$ pour une certaine constante C

Exercice 27 *Étudier les différents types de convergence de* $\sum_{n\geq 0} nx^\alpha e^{-n^2x}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

Exercice 28 *Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. On pose* $\| f \|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} | f(x) |$.

1) *On définit la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ par $f_0 = f$ et* $\forall n \geqslant 0,\ f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt$.
   a) *Montrer que* $| f_n(x) | \leqslant \frac{x^n \| f \|_\infty}{n!}$ $\forall n \geqslant 0$.
   b) *En déduire la convergence uniforme sur $[0,1]$ de la suite (f_n).*
2) *On définit une autre suite de fonctions par $g_0 = f$ et* $\forall n \geqslant 0,\ g_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x g_n(t)dt$.
   a) *On suppose que la suite (g_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction g. Déterminer g.*
   b) *Étudier la convergence uniforme sur $[0,1]$ de la suite (g_n) (on pourra considérer $g_n - g$).*

Exercice 29 *Sur $]0,+\infty[$, on considère la suite de fonctions définies par :*

$f_0 = Id$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0,+\infty[, \quad f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)})$.

1) *Montrer que, pour tout n, f_n est bien définie.*
2) *Étudier sa convergence simple*
3) *Étudier sa convergence uniforme*

Exercice 30 *Soit une fonction $f : [a,b] \to [a,b]$ de classe C^1 sur son domaine, $(f_n)_n$ la suite des fonctions définie par : $f_0(x) = x$, $f_1 = f$, et $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$ $\forall n \geqslant 1$.*

1) *Montrer que si* $\sup_{x\in[a,b]} |f'(x)| < 1$ $\sum_{k=1}^{+\infty}(f_k(x) - f_{k-1}(x))$ *converge uniformément. sur $[a,b]$.*
2) *En déduire que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction constante C, que $f(C) = C$ et que C est unique.*

Exercice 31 *Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ une série convergente de complexes.*
Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}_+$, telles que $\forall n\in\mathbb{N},\ B_{n+1}\leqslant B_n$.

1) *Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_nB_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ (on pourra introduite $A_{p,n} = \sum_{k=p}^{n} a_k$).*

2) *On suppose que $\forall n\in\mathbb{N},\ B_n(1)=1$. Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_nB_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.*

Exercice 32 *Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[-1,1]$ on pose $u_n(x) = \dfrac{x^n\sin(nx)}{n}$.*

1) *Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers une fonction continue, f.*
Indication: Transformation d'Abel.

2) *Justifier la dérivabilité de f sur $]-1,1[$ et calculer $f'(x)$. En déduire $f(x)$.*
Indication: $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x\sin x}{1-x\cos x}\right)$.

3) *En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$.*
Indication: $\dfrac{\pi-1}{2}$.

Exercice 33 *Étudier la convergence de la suite de fonctions définies par : $f_n(x) = \dfrac{n(n+1)}{x^{n+1}}\displaystyle\int_0^x (x-t)^{n-1}\sin t\, dt$. Indication: Poser $t = xu$ puis intégrer deux fois par parties : $f_n(x) = 1 - \displaystyle\int_0^1 (1-u)^{n+1}x\sin(xu)\, du$ donc (f_n) converge simplement vers la fonction constante 1, et la convergence est uniforme sur tout intervalle borné.*

Exercice 34 *Soit $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. On définit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $f_n = f^{(n)}$ (dérivée n-ème). On suppose que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers φ. Que peut-on dire de φ ?*

Exercice 35 *Soit $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n\cos^n x}{n+1}$.*

1) *Étudier la convergence de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Indication: Convergence absolue si $|\cos x|<1$, Semi-convergence si $\cos x = 1$, divergence si $\cos x = -1$.*

2) *Montrer la convergence de la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx$.*
Indication: Théorème de convergence monotone en regroupant les termes deux par deux.

3) *En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ sous forme d'une intégrale.*
Indication: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} -\ln(1-\cos x)\,dx$.

Exercice 36 *Soit* $f_n(x) = \dfrac{n^x}{(1+x)(1+x/2)\dots(1+x/n)}$.

1) *Étudier la convergence simple des fonctions* f_n.
Indication: $\dfrac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)} = 1 - \dfrac{x(x+1)}{2n^2} + \left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

2) *On note* $f = \lim f_n$. *Calculer* $f(x)$ *en fonction de* $f(x-1)$ *lorsque ces deux quantités existent.*

3) *Montrer que* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur son domaine de définition (on calculera* $f_n'(x)/f_n(x)$*).*

Exercice 37 *Montrer, pour* $x > 0$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{t+1}\, t$.

Indication: $\dfrac{1}{t+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$.

Exercice 38 1) *Étudier la convergence simple, uniforme, de* $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\big(\arctan(x+n) - \arctan(n)\big)$.
Indication: Convergence uniforme sur tout $[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$.

2) *Montrer que* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$.

3) *Chercher une relation simple entre* $f(x)$ *et* $f(x+1)$.
Indication: $f(x+1) = f(x) + \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$.

4) *Trouver* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
Indication: $f(x+1) - f(x) \sim \dfrac{1}{x}$ *donc la suite* $(f(n))$ *diverge et* f *est croissante* $\Longrightarrow \lim = +\infty$.

Exercice 39 *Étudier la convergence de la suite de fonctions définies par :* $f_n(x) = \dfrac{n(n+1)}{x^{n+1}} \displaystyle\int_0^x (x-t)^{n-1} \sin t\, dt$.
Indication: Poser $t = xu$ *puis intégrer deux fois par parties*

Exercice 40 *Soit* $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n(1+x)}\right)$ *et* $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

1) *Montrer que la fonction* f *est bien définie sur* $\mathbb{R}^+$.

2) *Majorer convenablement le reste de la série, et montrer qu'il y a convergence uniforme sur* $\mathbb{R}^+$. *Indication:* $|R_n(x)| \le |u_{n+1}(x)| \le \ln\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)$.

3) *Y a-t-il convergence normale ?*
Indication: Non, $\|u_n\|_\infty = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 41 *Soit* $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

1) *Établir l'existence et la continuité de* f *sur* $\mathbb{R}^{+*}$.

2) *Calculer* $f(x+1)$ *en fonction de* $f(x)$.
Indication: $f(x+1) = xf(x) - 1$.

3) *Tracer la courbe de* f.

Exercice 42 ***Fonction ζ et η de Riemann et constante d'Euler***

Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

1) *Déterminer le domaine de définition de* ζ.

2) *Montrer que* ζ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur ce domaine.*

3) *Prouver que* $\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$

Indication : majorer $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ *par comparaison une intégrale.*

4) *Prouver que* $\lim_{x\to 1} \zeta(x) = +\infty$

5) *Soit* $\gamma = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right)$.

Montrer que $\gamma = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$ *puis que* $\gamma = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k) - 1}{k}$.

6) a) *Décomposer en éléments simples sur* $\mathbb{C}$ *la fractions rationnelle :* $F_n(X) = \frac{1}{(1 + X/n)^n - 1}$.

b) *En déduire pour* $x \in \mathbb{R}^*$ *:* $\coth x = \frac{1}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{e^{-2x} - 1} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + k^2\pi^2}$.

c) *En déduire la valeur de* $\zeta(2)$.

7) *pour* $x > 0$ *:* $\eta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

a) *Établir pour* $x > 1$ *:* $\eta(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$.

b) *En déduire* $\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$ *pour* $x \longrightarrow 1^+$.

c) *Montrer que* $\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + (1)$. *On remarquera que* $\frac{1}{x-1} = \int_{t=1}^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$.

d) *En déduire la valeur de* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$.

Exercice 43 ***Non interversion limite-intégrale.***

1) *Soit* $f_n(x) = n\cos^n x \sin x$.

a) *Chercher la limite simple,* f*, des fonctions* f_n *sur* $[0, \frac{\pi}{2}]$.

b) *Vérifier que* $\int_0^{\pi/2} f(t)\,dt \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t)\,dt$.

2) a) *Déterminer la limite simple des fonctions* $f_n : x \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}$ *sur* $\mathbb{R}^+$ *et montrer qu'il y a convergence uniforme.*
(Utiliser la formule de Stirling : $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$*)*

b) *Calculer* $\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$.

Fin
À la prochaine