Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

Mamouni My Ismail

Feuille d'exercices

Algèbre Linéaire (révision)

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

C'est un voleur qui fait son tour de prospection habituel, il voit accroché sur la porte d'une entre d'un jardin ATTENTION PERROQUET MÉCHANT. Il s'éclate de rire et revient la nuit, quand il passe la barrière et pénètre dans le jardin. Soudain, le perroquet crie : "REX, ATTAQUE !!!!"

Mathématicien du jour

Diophante d'Alexandrie (env. 200/214 - env. 284/298)

Mathématicien grec. Surtout connu pour son étude des équations diophantiennes, il est surnommé le père de l'algèbre. Peu de choses sont connues de sa vie. Il était probablement un babylonien. Son œuvre est en partie perdue. Son ouvrage le plus important est son Arithmétique, qui influença les mathématiciens arabes et plus tard ceux de la Renaissance.

Exo 1 Noyaux et images itérés. Soit E un ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $N_k = \ker(f^k)$ et $I_k = \operatorname{Im} f^k$.

1. Montrer que la suite (N_k) est croissante (pour l'inclusion) et que la suite (I_k) est décroissante.

2. Soit p tel que $N_p = N_{p+1}$. Justifier l'existence de p et montrer que $N_{p+1} = N_{p+2} = \cdots = N_{p+k} = \dots$

3. Montrer que les suites (N_k) et (I_k) sont stationnaires partir du même rang p.

4. Montrer que $N_p \oplus I_p = E$.

5. Montrer que la suite $(\dim(N_{k+1}) - \dim(N_k))$ est décroissante.
Indication : Prendre F supplémentaire de I_{k+1} dans I_k et montrer que $I_{k+2} = I_{k+1} + f(F)$.

Exo 2 Théorème de Hadamard. Une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite diagonale strictement dominante si elle vérifie la relation suivante :

$$|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|, \quad \forall i \in [\![1, n]\!]$$

Montrer que de telles matrices sont toujours inversibles.
Indication : Penser résoudre le système linéaire $AX = 0$.

Exo 11 Van Der Monde

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ famille de nombres réels et

$$A = (a_i^{j-1})_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Résoudre le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + a_1x_2 + \cdots + a_1^{n-1}x_n & = & 0 \\ x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_2^{n-1}x_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ x_1 + a_nx_2 + \cdots + a_n^{n-1}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

2. En déduire que la matrice A est inversible si et seulement si les a_i sont deux deux distincts.

3. On suppose A inversible, proposer une méthode pour résoudre le système $AX = Y$, puis une pour inverser A.

4. Application : Donner l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}.$$

5. Dans la suite, on pose $V(a_1, \ldots, a_n) = \left(a_i^{j-1}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ et $P(X) = \det\left(V(a_, \ldots, a_{n-1}, X\right)$.

   a. Montrer que $P(X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   Indication : Développer le déterminant suivant la dernière ligne.

   b. Préciser son coefficient dominant.

   c. Calculer $P(a_i)$.

   d. En déduire la décomposition en facteurs irréductibles de $P(X)$.

   e. Calculer le déterminant de la matrice de Van Der Monde $\left(a_i^{j-1}\right)_{1\leq i,j\leq n}$

   f. A quelle condition la matrice A est inversible.

6. Chebychev On pose : $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

   a. Trouver une relation de récurrence entre T_{n+1}, T_n, T_{n-1}.

   b. Montrer que T_n est un polynôme de degré n, préciser son coefficient dominant.

   c. Montrer que $T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$ pour tout réel t.

   d. En déduire les racines de T_n.

7. Application :

   a. Donner une forme factorise du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos(2a) \\ 1 & \cos b & \cos(2b) \\ 1 & \cos c & \cos(2c) \end{vmatrix}$$

   b. En déduire comment factoriser dans le cas général le déterminant de la matrice

$$(\cos^{j-1}(a_i))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exo 12

Extraits de CNC

1 Base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit E un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on définit l'endomorphisme de E, not $u_{i,j}$ par la relation suivante : $u_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k} e_i$
Avec $\delta_{j,k}$ $= 1$ si $j = k$, appelé symbole de Kronecker.
$= 0$ si $j \neq k$
On note aussi, $E_{i,j}$ la matrice carre d'ordre n, dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la i^{me} ligne et j^{me} colonne, gal 1.

a Montrer que $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b Calculer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u_{i,j})$, en déduire que $(u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.

c Soit $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$ fixés, calculer pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$, $u_{i,j} \circ u_{k,l}(e_p)$, puis en déduire $E_{i,j} E_{k,l}$.

2 Commutant de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $AM = MA$, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$.

3 Formes linéaires et trace

a Exprimer la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, dans la base $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, puis en déduire les produits $AE_{k,l}$ et $E_{k,l}A$.

b Calculer $\mathrm{Tr}(AE_{k,l})$.

c En déduire que : $\mathrm{Tr}(AM) = 0, \ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow A = 0$.

d Soit ϕ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une et une seule matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :
$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \phi(X) = \mathrm{Tr}(AX)$

e On suppose que

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \phi(XY) = \phi(YX)$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \phi(X) = \lambda \mathrm{Tr}(X)$$

4 Commutant d'une matrice Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $AM = MA\}$, appelé commutant de A.

a Montrer que $\mathcal{C}_A$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b Soit $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale dont tous les λ_i sont distincts.

i Chercher $\mathcal{C}_A$.

ii Soit $\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & MA - AM \end{array}$

Montrer que Im ϕ est l'ensemble des matrices diagonale nulle.

Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

Exo 13 Lemme de Schur Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Le centre de $\mathcal{L}(E)$ est :
$Z = \{f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall\ g \in \mathcal{L}(E),\ f \circ g = g \circ f\}$.
Autrement dit formé par les endomorphismes qui commutent avec tous les autres.

1. Soit $f \in Z, x \in E$ tel que $(x, f(x))$ est libre, montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que $g(x) = x$ et $g \circ f(x) = -f(x)$.

2. En déduire que Z est l'ensemble des homothéties.

3. Dterminer $Z' = \{f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall\ g \in GL(E),\ f \circ g = g \circ f\}$.

À la prochaine

Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

Exo 3 Endomorphisme cyclique Soit E un ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $\left(f^k(x)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ engendre E.

1. Montrer que $\left(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\right)$ est une base de E.
   Considérer p maximal tel que $\mathcal{F} = \left(x, \ldots, f^{p-1}(x)\right)$ est libre, et prouver que $f^k(x)$ est combinaison linéaire de $\mathcal{F}$ pour tout entier $k \geq p$.

2. Montrer que si un endomorphisme $g \in \mathcal{L}(E)$ commute avec f alors $\exists (a_k)_{0\leq n-1} \in \mathbb{R}^n$ tel que $g = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k f^k$.

Exo 4 Limite de matrices .
On dit qu'une famille de matrice $A_\varepsilon = \left((a_{i,j}(\varepsilon)\right)_{i,j}$ converge vers une matrice $A = \left((a_{i,j}\right)_{i,j}$ si

$$\lim_{\varepsilon} a_{i,j}(\varepsilon) = a_{i,j}, \quad \forall i, j.$$

On écrit alors

$$\lim_{\varepsilon} A_\varepsilon = A.$$

Soit A une matrice non inversible.

1. 1ér cas : $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}} \neq \{0\}$. Soit $\alpha = \inf\{|\lambda|$ tel que $\lambda \in \mathbb{R}$ valeur propre non nulle de $A\}$.
   a. Justifier l'existence de α.
   b. En déduire que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que $|\varepsilon| < \alpha$, on a $A - \varepsilon I_n$ est inversible, puis que $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0 \rightarrow (} A - \varepsilon I_n) = A$..

2. 2ème cas : $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}} = \{0\}$. Montrer que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que $\varepsilon \neq 0$, on a $A - \varepsilon I_n$ est inversible, puis que $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0 \rightarrow (} A - \varepsilon I_n) = A$..

Exo 5 Autour de la Comatrice.

1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure.

a On suppose que A est inversible.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, associé A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, on pose $F_k = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

i Montrer que $f(F_k) = F_k$.

ii En déduire que $f^{-1}(F_k) = F_k$.

iii En déduire que A^{-1} est triangulaire supérieure.

iv En déduire que $\text{com}(A)$ est triangulaire inférieure.

b On suppose que A est non inversible.

i Montrer que $\exists \alpha \neq 0$ tel que $\forall 0 < \varepsilon < \alpha$, on a $A - \varepsilon I_n$, non inversible.

ii En déduire que $\text{com}(A)$ est triangulaire inférieure.

2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que : si $\text{rg}(A) = n$ alors $\text{rg}(\text{com}(A)) = n$
si $\text{rg}(A) = n - 1$ alors $\text{rg}(\text{com}(A)) = 1$
si $\text{rg}(A) \leq n - 2$ alors $\text{com}(A) = 0$
Indication : On pourra utiliser le résultat suivant, dit théorème de Rouché-Fontené :
Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ tel que $\text{rg}(A) = r$, alors il existe une matrice carrée $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ extraite de A qui soit inversible.

3 Si $\text{rg}A = n - 1$, montrer que $\text{com}\,A = U^tV$, où $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

4 Exprimer $\text{com}\,(\lambda A)$. en fonction de λ, n et $\text{com}\,(A)$.

5 Calculer $\text{com}\,(\text{com}\,A)$ dans le cas où A est inversible.

6 Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a Calculer $\text{com}\,(I_n)$.

b Si A et B sont inversibles, démontrer que
$\text{com}\,(AB) = (\text{com}\,A)(\text{com}\,B)$ et $\text{com}\,(A^{-1}) = \text{com}\,(A)^{-1}$.

c Démontrer le même résultat dans le cas général, en considérant des scalaires λ tels que $A - \lambda I$ et $B - \lambda I$ soient inversibles.

d En déduire que si A et B sont semblables, alors $\text{com}\,A$ et $\text{com}\,B$ le sont aussi.

Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

Exo 6 Un peu de calcul .

1 De la géométrie.

Dans tout l'exercice, $\mathbb{R}^3$ est muni de son repère canonique $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

a Déterminer l'équation du plan π passant par $A(0, -1, 2)$ et $B(-1, 2, 3)$ et contenant une droite parallèle $(O, \vec{j})$. b Déterminer la projection de D sur π parallèlement Δ, o

$$D : \begin{cases} x + y + z &= 1 \\ x - 2y - z &= 0 \end{cases} \quad \Delta : 6x = 2y = 3z \quad \pi : x + 3y + 2z = 6.$$

c On considère les deux droites

$$D : \begin{cases} x - z &= a \\ y + 3z &= -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + z &= 2b \\ 3x + 3y + 2z &= 7 \end{cases} \quad \text{o } a, b \in \mathbb{R}.$$

i Montrer que D et D' ne sont pas parallèles.

ii Donner une CNS sur a et b pour que D et D' soient concourantes.

iii Dans ce cas, former l'équation du plan les contenant.

2 Des systèmes linéaires.

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

a
$$\begin{cases} x + ay + a^2z &= a^3 \\ x + by + b^2z &= b^3 \\ x + cy + c^2z &= c^3 \end{cases}$$

Indication : Pensez utiliser les relation de Newton-Vite en racines et coefficients d'un polynôme.

b
$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \cdots + \beta x_n &= y_1 \\ \beta x_1 + \alpha x_2 + \cdots + \alpha x_n &= y_2 \\ \vdots & \\ \beta x_1 + \beta x_2 + \cdots + \alpha x_n &= y_n \end{cases}$$

Indication : Pensez à écrire le système sous sa forme matricielle $AX = b$.

Exo 7 $E = \text{Im } f + \ker f$? ? Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E.

1 On rappelle que si f est un projecteur, i.e, $f^2 = f$, alors

$$E = \text{Im } f \bigoplus \ker f \quad (1)$$

Donner un exemple d'application linéaire qui ne vérifie pas (1).

2 Montrer que : $\text{Im } f \cap \ker f = \{0_E\} \iff \ker f = \ker f^2$.

3 Montrer que : $E = \text{Im } f + \ker f \iff \text{Im } f = \text{Im } f^2$.

4 Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f vérifie (1).

5 Donner un exemple d'application linéaire qui n'est pas projecteur et qui vérifie pourtant (1).

Exo 8 — Formule du rang

1. Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, H est un sous-espace vectoriel de E et K est un sous-espace vectoriel de F, montrer que :
   a. $\mathrm{Im}\ f_{|H} = f(H)$ et $\ker f_{|H} = \ker f \cap H$.
   b. $\dim f(H) = \dim(H) - \dim(H \cap \ker f)$.
   c. $\dim(f^{-1}(K)) = \dim(K \cap \mathrm{Im}\ f) + \dim(\ker f)$.

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = 0$.
   a. Montrer que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(f^2) \leq \dim(E)$.
   b. Montrer que $2\mathrm{rg}(f^2) \leq \mathrm{rg}(f)$.

   Indication : On pourra appliquer le théorème du rang $f_{\restriction \mathrm{Im}\ f}$.

3. Soit E un ev de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Établir que :
   a. $\dim \ker(f \circ g) \leq \dim \ker f \oplus \dim \ker g$.

   Indication : On pourra appliquer le théorème du rang $f_{\restriction \mathrm{Im}\ g}$.

   b. $\dim(\mathrm{Im}\ f \cap \ker g) = \mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g \circ f)$.

   Indication : On pourra appliquer le théorème du rang $g_{\restriction \mathrm{Im}\ f}$.

   c. $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim E \leq \mathrm{rg}(f \circ g) \leq \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$.

Exo 9 — Autour du rang

Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimensions finies et $u, v : E \to F$ linéaires.

1. Montrer que $\forall \lambda \neq 0$, on a
$$\mathrm{Im}\ (\lambda u) = \mathrm{Im}\ u \text{ et } \ker(\lambda u) = \ker u.$$

2. Montrer que $\mathrm{Im}\ u + v \subset \mathrm{Im}\ u + \mathrm{Im}\ v$.

3. En déduire que
$$\mathrm{rg}(u + v) \leq \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v).$$

4. Montrer que $\mathrm{Im}\ u \cap \mathrm{Im}\ v = \{0_E\} \Longrightarrow \ker u + v = \ker u \cap \ker v$.

5. En déduire que $\mathrm{rg}(u + v) = \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$ si et seulement si $\mathrm{Im}\ u \cap \mathrm{Im}\ v = \{0_F\}$ et $\ker u + \ker v = E$.

6. Montrer que
$$|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leq \mathrm{rg}(u + v).$$

Exo 10 Endomorphismes nilpotents.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$. Dans ce cas, l'indice de f est le plus petit entier p tel que $f^p = 0$. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p.

1. Soit $u \in E \setminus \ker f^{p-1}$. Montrer que la famille $\left(u, f(u), \dots, f^{p-1}(u)\right)$ est libre.

2. En déduire que si E est de dimension finie n, alors $f^n = 0$.

3. Soit $g \in GL(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $f + g \in GL(E)$.

4. On suppose que $p = n$. Soit $\mathcal{B} = \left(u, f(u), \dots, f^{n-1}(u)\right)$ une base de E.

   a. Montrer que $\exists (a_k)_{0 \leq n-1} \in \mathbb{R}^n$ tel que $g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$.

   b. Donner $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.