Mamouni My Ismail
*mamouni.myismail@gmail.com*

Mamouni My Ismail

Feuille d'exercices
# Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$

MP-CPGE Rabat

**Blague du jour**

Blague belge : Un homme se jette du 8 ème étage d'un immeuble. Ses cheveux arrivent en bas 2 minutes plus tard. Pourquoi ?
Réponse : Il utilise un shampoing anti-chute des cheveux.
Commentaire du français : Hi hi Quelle blague ! ! ! Quel idiot peut raconter ça ?
Commentaire du belge : Quel est l'autre idiot à qui cette blague peut arracher un sourire du bout des lèvres. ? ?

**Étienne Bézout (1730-1783)** — Mathématicien du jour

Mathématicien français, il rédige le Cours complet de mathématiques à l'usage de la marine et de l'artillerie, qui devint plus tard le livre de chevet des candidats au concours d'entrée à l'École polytechnique. Il est également l'auteur d'une Théorie générale des équations algébriques, publiée en 1779, sur la théorie de l'élimination et des fonctions symétriques sur les racines d'une équation : il utilise les déterminants dans un article de l'Histoire de l'Académie royale, parue en 1764, mais ne traite pas de la théorie générale.

## 1 Notion d'idéal

**Exo 1** Idéaux particuliers

Soit $A$ un anneau commutatif et $\mathcal{I}$ un idéal de $A$.

1. idéal premier.
On dit que $\mathcal{I}$ est un idéal premier si et seulement si $\mathcal{I}$ est différent de $A$, et pour tous $a$ et $b$ de $A$, on a
$$ab \in \mathcal{I} \text{ et } a \notin \mathcal{I} \Longrightarrow b \in \mathcal{I}.$$
   - a. Montrer que si $\mathcal{I}$ est premier, $a, b \in A$, alors $ab \in \mathcal{I} \Longrightarrow a \in \mathcal{I}$ ou $b \in \mathcal{I}$.
   - b. Montrer que si $\mathcal{I}$ est premier, $a \in A, n \in \mathbb{N}^*s$, alors $a^n \in \mathcal{I} \Longrightarrow a \in \mathcal{I}$ ou $b \in \mathcal{I}$.
   - c. Montrer que $\mathcal{I}$ est un idéal premier de A si et seulement si $A/\mathcal{I}$ est intègre.

2. idéal maximal.
$\mathcal{I}$ est dit maximal quand il n'existe que deux idéaux contenant $\mathcal{I}$ savoir $A$ et $\mathcal{I}$ lui même.
Montrer que :
   - a. Montrer que tout idéal de $A$ qui contient $1_A$ est égal à $A$.
   - b. Soit $\mathcal{I}$ idéal maximal de $A$ et $a \in A, a \notin \mathcal{I}$, montrer que $aA + \mathcal{I} = \mathcal{I}$.
   - c. Tout idéal maximal est nécessairement premier.
   - d. $\mathcal{I}$ est un idéal maximal de $A$ si et seulement si $A/\mathcal{I}$ est un corps.

Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 2** Idéaux et morphismes Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ deux anneaux commutatifs, $\varphi : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ un morphisme d'anneaux et $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ deux idéaux de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ respectivement.

1. a) Montrer que $\varphi^{-1}(\mathcal{J})$ est un idéal de $\mathbf{A}$.

   b) Montrer que si $\mathcal{J}$ est premier, alors $\varphi^{-1}(\mathcal{J})$ est aussi premier.

   b) Montrer l'aide d'un contre-exemple, que ce résultat n'est pas vrai dans le cas des idéaux maximaux.

2. a) On suppose que $\varphi$ est surjectif, montrer alors que $\varphi(\mathcal{I})$ est un idéal de $\mathbf{B}$.

   b) Montrer à l'aide d'un contre-exemple, que ce résultat n'est pas toujours vrai quand $\varphi$ n'est pas surjective.

**Exo 3** Radical d'un idéal .
Soit $\mathbf{A}$ un anneau commutatif et $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathbf{A}$, on appelle radical de $\mathcal{I}$, not

$$\sqrt{\mathcal{I}} = \{x \in \mathbf{A} / \ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x^n \in \mathcal{I}\}$$

1. Déterminer $\sqrt{30\mathbb{Z}}$.

2. Soient $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ deux idéaux de $\mathbf{A}$. Montrer les propriétés suivantes :

   a) $\sqrt{\mathcal{I}}$ est un idéal de $\mathbf{A}$.

   b) $\mathcal{I} \subset \mathcal{J} \Longrightarrow \sqrt{\mathcal{I}} \subset \sqrt{\mathcal{J}}$.

   c) $\mathcal{I} \subset \sqrt{\mathcal{I}}$.

   d) $\sqrt{\sqrt{\mathcal{I}}} = \sqrt{\mathcal{I}}$.

   e) $\sqrt{\mathcal{I}\mathcal{J}} = \sqrt{\mathcal{I} \cap \mathcal{J}} = \sqrt{\mathcal{I}} \cap \sqrt{\mathcal{J}}$.

   f) $\sqrt{\mathcal{I} + \mathcal{J}} = \sqrt{\sqrt{\mathcal{I}} + \sqrt{\mathcal{J}}}$.

   g) $\sqrt{\mathcal{I}} = \mathbf{A} \Longleftrightarrow \mathcal{I} = \mathbf{A}$.

Exo 4

Théorème de factorisation et Idéaux de $\mathcal{L}(E)$

1 a Soient $E$, $F$, $G$ trois espaces vectoriels, soient $w \in \mathcal{L}(E,G)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer l'équivalence :

$$\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Im} v \iff \exists u \in \mathcal{L}(E,F) \quad w = v \circ u\,.$$

b Soient $u_1, \cdots, u_k$ et $v$ des endomorphismes d'un espace vectoriel $E$ tels que $\operatorname{Im} v \subset \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Im} u_i$.

Montrer qu'il existe des endomorphismes $a_1, \cdots, a_k$ de $E$ tels que $v = \sum_{i=1}^{k} u_i \circ a_i$.

c Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que les idéaux à droite de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ sont les ensembles de la forme $\mathcal{I}_F = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \operatorname{Im} u \subset F\}$, où $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

2 a Soient $E$, $F$, $G$ trois espaces vectoriels, soient $w \in \mathcal{L}(E,G)$ et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer l'équivalence

$$\ker u \subset \ker w \iff \exists v \in \mathcal{L}(F,G) \quad w = v \circ u\,.$$

b Soient $u_1, \cdots, u_k$ et $v$ des endomorphismes d'un espace vectoriel $E$ tels que $\bigcap_{i=1}^{k} \ker u_i \subset \ker v$.

Montrer qu'il existe des endomorphismes $a_1, \cdots, a_k$ de $E$ tels que $v = \sum_{i=1}^{k} a_i \circ u_i$.

c Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que les idéaux à gauche de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ sont les ensembles de la forme $\mathcal{J}_F = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid F \subset \ker u\}$, où $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

Exo 5

Nilradical Soit $A$ un anneau commutatif. Le nilradical de $A$ est l'ensemble,

$$\operatorname{nil}(A) = \{a \in A \ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } a^n = 0_A\}$$

c'est–dire l'ensemble des nilpotents de $A$. Montrer que :

1 $\operatorname{nil}(A)$ est un idéal de $A$.

2 Si $\mathcal{I}$ est un idéal premier de $A$, alors $\operatorname{nil}(A) \subset \mathcal{I}$.

3 $\operatorname{nil}(A/\operatorname{nil}(A)) = \{0_A\}$.

Mamouni My Ismail
*mamouni.myismail@gmail.com*

# 2 Arithmétique

**Exo 6** Indicatrice d'Euler. l'indicateur d'Euler d'un entier positif $n$, not $\varphi(n)$ est défini comme étant le nombre d'entiers positifs inférieurs ou égaux $n$ et premiers avec $n$.

1. Justifier la relation $\varphi(n) = \text{card}\,(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, où $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ désigne l'ensemble des éléments inversibles dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2. Montrer que $p$ premier si et seulement si $\varphi(p) = p - 1$.

3. Soit $p$ premier et $\alpha \in \mathbb{N}$. Donner tous les multiples de $p$ inférieurs $p^\alpha$, puis en déduire que : $\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$.

4. Soit $n$ et $m$ premiers entre eux.
   a. Construire un isomorphisme $\psi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$
   b. Montrer $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, on a $(a,b)$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ si et seulement si $\psi(a,b)$ est inversible dans $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$.
   c. En déduire que $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$.

5. Soit $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ où $p_i$ sont des nombres premiers, en déduire $\varphi(n)$.
   Calculer $\varphi(180)$.

6. Soit $a \in \mathbb{N}^*$ premier avec $n$,
   a. Montrer que l'application : $\phi : \begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \\ x & \longmapsto & ax \end{array}$ est bien définie et bijective.
   b. En déduire que $\prod_{x \in U} x = \prod_{x \in U} \phi(x)$.
   c. En déduire que : $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$ Thorme d'Euler.

**Exo 7** Cryptographie-RSA. Soit $p$ et $q$ deux nombres premiers, on pose $n = pq$. Soit $M$ un entier naturel premier avec $pq$, qui représente le message à décoder, et $C$ le message codé à envoyer.

1. Dites pourquoi $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$.

2. Soit $e$ premier avec $\varphi(n)$, justifier l'existence de $d \in \mathbb{Z}$ tel que $ed \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$.

3. Le message $M$ est codé en $C$ tel que $C \equiv M^e \pmod n$.
   En déduire que : $C^d \equiv M \pmod n$.
   Indication : On pourra penser utiliser le théorème d'Euler.

4. Application numérique : On prend $p = 3, q = 5$ et $M = 7$, donner les messages codé $C$ et décodé $D$. On prend cette fois $M = 12$, que remarquez vous après avoir fait les calculs. Expliquer ce phénomène et dite comment y remédier.

Exo 8 Théorème chinois .

1. Les 17 pirates et le cuisinier chinois.
Une bande de 17 pirates dispose d'un butin composé de $N$ pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager également et de donner le reste au cuisinier (non pirate). Celui ci reçoit 3 pièces.
Mais une rixe éclate et 6 pirates sont tués. Tout le butin est reconstitué et partagé entre les survivants comme précédemment ; le cuisinier reçoit alors 4 pièces.
Dans un naufrage ultérieur, seuls le butin, 6 pirates et le cuisinier sont sauvés. Le butin est à nouveau partagé de la même manière et le cuisinier reçoit 5 pièces.
Quelle est alors la fortune minimale que peut espérer le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?
Réponse : 785

2. Engrenages :
Une roue dentée comportant $a$ dents s'engrène dans une tringle horizontale. Combien de dents doivent passer pour que sa $r$-ième dent vienne en coïncidence avec la $s$-ime dent d'une autre roue dentée comportant elle $b$ dents ?

## 3 Éléments propres

Exo 9 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $A$ est inversible.
   a. Exprimer $\chi_{A^{-1}}(X)$ en fonction de $\chi_A(X)$.
   b. En déduire que $\mathrm{sp}(A^{-1}) = (\mathrm{sp}(A))^{-1} = \{\lambda^{-1},\ \lambda \in \mathrm{sp}(A)\}$.

2. Soit $a, b \in \mathbb{R}$.
   a. Exprimer $\chi_{aA+bI_n}(X)$ en fonction de $\chi_A(X)$, $a, b$ et $n$.
   b. En déduire que $\mathrm{sp}(()aA + bI_n) = a\mathrm{sp}(A) + b = \{a\lambda + b,\ \lambda \in \mathrm{sp}(A)\}$.

Exo 10 Matrice stochastique Soit $A$ une matrice stochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ coefficients strictement positifs, i.e.

$$\begin{array}{ll} a_{i,j} > 0 & \forall i, j \in [\![1, n]\!] \\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1 & \forall i \in [\![1, n]\!] \end{array}$$

Montrer les résultats suivants :

1. 1 est valeur propre de $A$ et que $E_1$ le sous-espace propre associé est de dimension égale à 1 .

2. Pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de $A$, on a : $|\lambda| \leq 1$.

3. Si $\lambda$ est valeur propre telle que $|\lambda| = 1$ alors $\lambda = 1$.

**Exo 11** Nombres algébriques Un nombre complexe $z$ est dit algébrique s'il est solution d'une équation polynomiale coefficients dans $\mathbb{Z}$. Dans le cas contraire on dit qu'il est transcendant.

1. Montrer que tout nombre rationnel est algébrique.

2. Donner un exemple de nombre réel transcendent.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$.

   a. Montrer que $z$ est algébrique si et seulement si $\exists P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(z) = 0$.
   On dit alors que $P$ est un polynôme annulateur pour $z$.

   b. Montrer que l'ensemble $\mathcal{I}_z = \{P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(z) = 0\}$ est soit vide, soit un idéal de $\mathbb{Q}[X]$.

   c. En déduire que tout nombre algébrique $z$, admet un unique polynôme annulateur unitaire de degré minimal qui divise tous les autres polynômes annulateurs. On le note $\pi_z$.

4. Donner les polynômes minimaux suivants : $\pi_{\sqrt{2}}$ et $\pi_j$ o $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

**Exo 12** Que peut-on dire d'un endomorphisme ayant un polynôme annulateur de degré 1.

**Exo 13** Soit $f$ un endomorphisme de $E$ et $P$ un polynôme annulateur de $f$ de degré $n$.

1. Montrer que $f$ est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$.

2. En déduire que dans ce cas $f^{-1} \in \operatorname{Vect}(f^k)_{0 \leq k \leq n-1}$.

**Exo 14** Endomorphismes nilpotents.
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$. Dans ce cas, l'indice de $f$ est le plus petit entier $p$ tel que $f^p = 0$. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $p$. Soit $g \in GL(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$.

1. Soit $u \in E \setminus \ker f^{p-1}$. Montrer que la famille $\left(u, f(u), \dots, f^{p-1}(u)\right)$ est libre.

2. En déduire que si $E$ est de dimension finie $n$, alors $f^n = 0$.

3. Montrer que $id_E - f$ et $id_E + f$ sont inversible, donner leurs inverses en fonction des puissances de $f$.

4. Montrer que $f + g \in GL(E)$.

5. On suppose que $p = n$. Soit $\mathcal{B} = \left(u, f(u), \dots, f^{n-1}(u)\right)$ une base de $E$.

   a. Montrer que $\exists (a_k)_{0 \leq n-1} \in \mathbb{R}^n$ tel que $g = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$.

   b. Donner $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

6. On ne considère plus dorénavant $f$ nilpotente.

   a. Montrer que $f$ est nilpotent si et seulement si 0 est son unique valeur propre.

   b. En déduire, dans le cas où $f$ est nilpotent :

      i. La forme son polynôme minimal,

      ii. Son degré en fonction de l'indice de nilpotence de $f$.

      iii. La forme du polynôme caractéristique.

mamouni.new.fr
Mamouni My Ismail
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 15** Endomorphisme cyclique.

Soit $E$ un ev de dimension $n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On que $E$ est cyclique (ou monogène) s'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille $\left(f^k(x_0)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ engendre $E$. On sauf dans l'exercice (sauf mention du contraire) que $f$ est cyclique.

1. Justifier l'existence de l'entier $p$ maximal tel que $\mathcal{F} = \left(x_0, \ldots, f^{p-1}(x_0)\right)$ soit libre.

2. Montrer que $f^k(x_0)$ est combinaison linaire de $\mathcal{F}$ pour tout entier $k \geq p$.

3. En déduire que $\mathcal{B} = \left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de $E$.

4. En déduire que $\deg \pi_f = n$, comparer $\pi_f$ et $\chi_f$.

5. Montrer que si un endomorphisme $g \in \mathcal{L}(E)$ commute avec $f$.
   - a. Dire pourquoi que $\exists (a_k)_{0\leq n-1} \in \mathbb{R}^n$ tel que $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)$
   - b. Montrer que $g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x)$ pour tout $x \in \mathcal{B}$.
   - c. En déduire que $g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$.

6. On ne suppose plus $f$ cyclique, mais que $\deg \pi_f = n$ et on se propose de montrer que $f$ est effectivement cyclique.
   - a. Pour tout $x \in E$, on note par $\mathcal{I}_x$ l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(u)(x) = 0$. Montrer que $\mathcal{I}_x$ est un idéal non nul de $\mathbb{K}[X]$, engendré par un unique polynôme unitaire, qu'on notera $\pi_{f,x}$.
   - b. Dire pourquoi $\pi_{f,x} = \pi_f$.
   - c. En déduire que $f$ est cyclique.

7. Montrer que les assertions suivantes sont équivalents :
   - a. $f$ est cyclique.
   - b. $\deg \pi_u = n$.
   - c. $\exists x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{(n-1)}(x_0))$ soit une base de $E$.
   - d. $(\mathrm{id}, f, \ldots, f^{n-1})$ libre dans $\mathcal{L}(E)$.

8. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$ et $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{(n-1)}(x_0))$ une base de $E$.
   - a. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $g(x_0) = P(f)(x_0)$.
   - b. En déduire que $g = P(f)$
   - c. En déduire une base et la dimension du commutant de $f$, défini par $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que } f \circ g = g \circ f\}$

**Exo 16** Sous-espaces monogènes et Polynôme minimal. Extrait CNC-99

Dans tout l'exercice $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et $E$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. Soit $u \in Li(E)$ et $x \in E$ avec $x \neq 0$. On pose $E_u(x) = \{P(u)(x);\ P \in \mathbb{K}[X]\}$.

1. Montrer que $E_u(x)$ est un sous-espace vectoriel de $E$, stable par $u$ et non réduit à $\{0\}$. On note par $u_x$ l'endomorphisme induit par $u$ sur $E_u(x)$.

2. Si $x \in \ker u$, donner la forme générale des éléments de $E_u(x)$, donner en particulier $\dim E_u(x)$

3. Même question si cette fois $x$ est un vecteur propre de $u$ associé à une valeur propre $\lambda$ de $u$.

4. On note par $\mathcal{I}_x$ l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(u)(x) = 0$.
   - a. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, montrer que $E_u(x)$ est stable par $P(u)$.
   - b. Soit $P \in \mathcal{I}_x$, montrer que $P(u)$ induit sur $E_u(x)$ l'endomorphisme nul.
   - c. Montrer que $\mathcal{I}_x$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non nul, engendré par un polynôme unitaire, qu'on va noter $\pi_{u,x}$ et appelé polynôme minimal de $u$ en $x$.

5. 
   - a. Dire pourquoi $\pi_{u,x}$ divise $\pi_u$.
   - b. Donner un exemple où :
     - i. $\pi_u = \pi_{u,x}$.
     - ii. $\pi_{u,x}$ divise strictement $\pi_u$.

6. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $x$ et $u$ pour que $\deg(\pi_{u,x}) = 1$.

7. On suppose dans cette question que $\deg(\pi_{u,x}) = k \geq 2$ avec $\pi_{u,x} = X^k - \sum_{j=0}^{k-1} a_j X^j$.
   - a. Montrer que $\mathcal{B}_x = (x, u(x), \ldots, u^{k-1}(x))$ est une base de $E_u(x)$.
   - b. Que peut-on alors dire de l'espace $E_u(x)$.
   - c. En déduire $\dim E_u(x)$.
   - b. Donner la forme de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_x}(u_x)$.

8. En déduire que $\pi_{u_x} = \pi_{u,x}$.

Mamouni My Ismail
*mamouni.new.fr*
*mamouni.myismail@gmail.com*

**Exo 17** Résultant de 2 polynômes — Extrait CCP 2009

Soit $A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $B = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degrés respectifs $p$ et $q$. On appelle résultant de $A$ et $B$ le déterminant d'ordre $p+q$ noté $res(A,B)$ défini par

$$res(A,B) = \det M_{A,B} \text{ où } M_{A,B} = \begin{pmatrix} a_0 & & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & & \vdots & & b_0 \\ a_p & & a_1 & a_0 & \vdots & & b_1 \\ & \ddots & \vdots & a_1 & b_q & & \vdots \\ & & a_p & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & a_p & & & b_q \end{pmatrix}$$

1. Donner la forme de $M_{A,B}$ pour $A = 1+2X+3X^2$ et $B = 4+5X+6X^2+7X^3$.

2. Soit $u: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_{p+q-1}[X] \\ (U,V) & \longmapsto & UA+VB \end{array}$.
   a. Montrer que $u$ est linéaire.
   b. Donner la forme générale des éléments de $\ker u$.
   c. Montrer que $u$ est un isomorphisme si et seulement si $A \wedge B = 1$.

3. Soit $\mathcal{B} = ((1,0),(X,0),\cdots,(X^{q-1},0),(0,1),(0,X),\cdots,(0,X^{p-1}))$ et $\mathcal{B}' = (1,X,\cdots,X^{p+q-1})$.
   a. Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$.
   b. En déduire que $A \wedge B = 1 \iff Res(A,B) \neq 0$.

**Exo 18** Extrait de E3A 2008

1. On note par $E$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par les fonctions $\cos, \sin, \cosh, \sinh$.
   a. Quel est la dimension de $E$.
   b. Justifier que la dérivation induit sur $E$ un endomorphisme $\delta$.
   c. Déterminer $\pi_\delta$.

2. a. Justifier que la dérivation induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ un endomorphisme $\delta_n$.
   b. Calculer $\delta_n^{n+1}$ et $\delta_n^n(X^n)$.
   c. En déduire $\pi_{\delta_n}$.

**Exo 19** Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Donner $\text{rg} J$, en déduire $\dim \ker J$.

2. En déduire une valeur propre de $A$ et la dimension du sous-espace propre associé.

3. Calculer $J^2$, en déduire un polynôme annulateur de $J$.

4. En déduire le spectre de $J$, $\pi_J$ et $\chi_J$.

Mamouni My Ismail
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 20** Centrale MP 2000 .

On considère la matrice de $\mathcal{M}_n(()\mathbb{C})$ :

$$A = \begin{pmatrix} c & a & \dots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & c \end{pmatrix}$$

On pose

$$P(x) = \det(U + xI_n)$$

1. Montrer que $P$ est un polynôme de degré 1, de la forme $\alpha x + \beta$.
Indication : Faire des opérations sur les lignes ou colonnes.

2. On suppose que $a \neq b$.
   a) Calculer $P(-a)$ et $P(-b)$, en déduire $\alpha$ et $\beta$
   b) En déduire que $\chi_A(X) = \dfrac{(-1)^n}{a-b}\left(a(X+b-c)^n - b(X+a-c)^n\right)$.
   c) Montrer qu'en général les valeurs propres de $A$ sont sur un cercle.

3. Donner le polynôme caractéristique de $A$ quand $a = b$.

**Exo 21** Matrice compagnon .

Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} - X^n \in \mathbb{K}_n[X]$, sa matrice compagnon est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & a_0 \\ 1 & \ddots & & a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n$, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de $E$ et $\varphi$ l'endomorphisme de $E$ de matrice $M$ dans $\mathcal{B}$.

1. Montrer que $\chi_M = P$.

2. Calculer $\varphi^k(\vec{e}_1)$ pour $0 \leq k \leq n$.

3. En déduire que $P(M) = 0$, sans utiliser le théorème de Hamilton-Cayley.

4. Application :
   a. Montrer qu'une matrice compagnon est semblable à sa transposée.
   b. En déduire que pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ les matrices $M$ et ${}^tM$ sont semblables.

Exo 22 Matrices spectres disjoints .

1 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre :

a : $\forall\ C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $AX - XB = C$.

b : $\forall\ X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a $AX = XB \Longrightarrow X = 0$.

c : $\chi_B(A)$ est inversible.

d : $A$ et $B$ n'ont pas de valeur propre en commun.

2 Application : Soient $A, B, P$ trois matrices carres complexes avec $P \neq 0$ telles que $AP = PB$. Montrer que $A$ et $B$ ont une valeur propre commune.

Exo 23 Sous espaces stables.

1 Droites et hyperplans stables.

Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

a Montrer qu'il existe une droite vectorielle stable par $u$.

b Montrer qu'il existe un hyperplan stable par $u$

Indication : considérer Im $(u - \lambda \mathrm{id}_E)$ o $\lambda$ est une valeur propre de $u$.

c Donner un exemple où ces propriétés sont en défaut pour un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .

2 Plan stable.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda = a + ib$ une valeur propre non réelle de $M$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$). On note $X$ un vecteur propre complexe de $M$.

a Montrer que $\overline{X}$ est aussi vecteur propre de $M$.

b Montrer que $(X, \overline{X})$ est libre dans $\mathbb{C}^n$.

c Soient $U = \dfrac{1}{2}(X + \overline{X})$, $V = \dfrac{1}{2i}(X - \overline{X})$.
Montrer que $(U, V)$ est libre dans $\mathbb{R}^n$.

d Soit $F = \mathrm{vect}(U, V)$. Montrer que $F$ est stable par $\varphi$ (endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé $M$) et donner la matrice de $\varphi_{|F}$ dans la base $(U, V)$.

3 Plans stables.

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

a Soit $F$ un plan vectoriel. Montrer que si $F$ est stable par $f$ alors il existe $P \in \mathbb{K}_2[x]$ non nul tel que $F \subset \ker P(f)$.

b Réciproquement, si $P \in \mathbb{K}_2[x]$ est non nul, montrer que $\ker P(f)$ contient un plan stable par $f$.

c Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ montrer que $f$ admet toujours une droite ou un plan stable.

**Exo 24** polynôme minimal d'un vecteur. Extraits CNC 99

Soit $u$ un endomorphisme de $E$, espace vectoriel de dimension $n$ sur le corps $\mathbb{K}$.

1. Soit $x \in E$, montrer que l'ensemble $\{P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u)(x) = 0_E\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ engendré par un unique polynôme unitaire, not $\pi_{x,u}$ et appel polynôme minimal de $x$ en $u$.

2. Montrer que $\pi_{x,u}$ divise $\pi_u$.

3. Donner $\pi_{x,u}$ quand $x \in \ker u$.

4. Exemple : On suppose que $u$ est un projecteur non nul, différent de l'identité. Rappeler son polynôme minimal, ainsi que celui de $x$ quand $x \in \operatorname{Im} u$.

5. Application : On se propose de montrer l'équivalence suivante : $\{0\}$ et $E$ sont les seuls sous-espace vectoriel de $E$ stables par $u$ si et seulement si $\chi_u$ est irréductible sur $\mathbb{K}$. Pour cela pour tout $x \in E$, on pose $\mathbb{K}_u[x] = \{P(u)(x)$ tel que $P \in \mathbb{K}[X]\}$, appel sous-espace cyclique engendré par $x$
   - a On suppose que $\chi_u$ est irréductible.
     - i Si $x \neq 0$, montrer que $\chi_u = \pi_u = \pi_{x,u}$.
     - ii En déduire que $\mathbb{K}_u[x] = E$, puis conclure.
   - b Réciproquement.
     - i Soit $x \neq 0$, montrer que $\mathbb{K}_u[X] = E$.
     - ii Supposons qu'il existe $P$ un diviseur non trivial de $\chi_u$ et soit $y = P(u)(x)$. Montrer que $\pi_{y,u} = \chi_u/P$, puis en déduire une contradiction.

**Exo 25** Endomorphisme cyclique.

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie gale $n$. Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit cyclique si $\exists a \in E$ tel que la famille $(f^k(a))_{k\in\mathbb{N}}$ soit une famille génératrice de $E$.

1. Montrer que $\forall k \geq n$, on a : $f^k(a) \in \operatorname{Vect}\left((f^k(a))_{0\leq k\leq n}\right)$.

2. Soit $P \in K[X]$ un polynôme annulateur de $f$, non nul. Montrer que $\deg(P) \geq n$ (raisonner par l'absurde).

3. En déduire que le polynôme minimal de $f$ est (au signe près) le polynôme caractéristique de $f$.

4. Étudier la réciproque

**Exo 26** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, montrer que $P(u)$ est un automorphisme $\Longleftrightarrow P \wedge \pi_u = 1$.

**Exo 27** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Exprimer $\chi_{A^{-1}}$ en fonction de $\chi_A$.

**Exo 28** $\operatorname{sp}(u \circ v) = \operatorname{sp}(v \circ u)$.

Soient $E$ un K-espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que si $\lambda$ est valeur propre de $u \circ v$ alors $\lambda$ est valeur propre de $v \circ u$ (on distinguera les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$).

2. En déduire que $^{(}u \circ v) =^{(} v \circ u)$.

**Exo 29** Crochet de Lie.

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul, $E$, on pose pour tous endomorphismes $u$ et $v$ :

$$[u,v] = u \circ v - v \circ u \qquad \text{Crochet de Lie.}$$

1. Montrer que $(\mathcal{L}(E), +, ., [,])$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

2. Montrer que l'application : $\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{L}(E)^2 & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ & (u,v) & \longmapsto & [u,v] \end{array}$ est bilinéaire symétrique.

3. Montrer que $\forall u, v, w \in \mathcal{L}(E)$, on a :

$$[u,[v,w]] + [v,[w,u]] + [w,[u,v]] = 0. \qquad \text{identit de Jacobi.}$$

4. Soient $u, v$ deux endomorphisme de $E$ tels que $[u,v] = \mathrm{id}_E$. Montrer que :
   a. $[u^k, v] = ku^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}$.
   b. $[P(u), v] = P'(u)$ pour $P \in \mathbb{K}[X]$.
   c. $u$ et $v$ n'ont pas de polynômes minimaux.

À la prochaine