CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ
المُؤ مِنُون

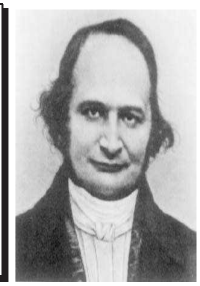
صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Feuille d'exercices: *Calcul différentiel*

8 novembre 2009

Blague du jour
C'est l'histoire de deux belles fonctions f et g définies sur un intervalle I, telles que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in I$.
– Regardez-moi, comme je suis belle ! dit $g(x)$.
– Oui mais tu as tout copié sur moi... répond $f(x)$.
– g, vexée, revient le lendemain, relookée et habillée en $x + h$.
– Salut, lance $g(x + h)$.
– Mais, qu'est ce que tu as ? demande $f(x)$.
– Bah j'essaie de me différentier...

Mathématicen du jour ***Jacobi.***
Charles Gustave Jacob Jacobi, (1804-1851) est un mathématicien allemand. Il obtient son doctorat à l'âge de 21 ans. Jacobi a écrit le traité classique sur les fonctions elliptiques, d'une importance capitale en physique mathématique. Il est l'un des fondateurs de la théorie des déterminants. En particulier, on lui le déterminant de la matrice (dite jacobienne) qui est crucial dans le calcul infinitésimal, et qui joue un rôle important dans la résolution de problèmes non-linéaires et en robotique.



Remerciements à Michel Quercia pour la source Latex des exercices

Dérivées partielles.

Exercice 1 . ***Différentielle du déterminant.***
Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \det M \end{array}$

1) **Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que l'on a pour $M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:**

$$df_M(H) = \mathbf{tr}({}^t\mathrm{com}(M).H)$$

2) ***Application*** **: soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P_M(X) = (-1)^n X^n + \cdots + a_1 X + \det(M)$.**
Exprimer a_1 en fonction des cofacteurs de M.

Exercice 2 . **Soit U l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré n et à racines réelles simples.**

1) **Montrer que U est ouvert dans $\mathbb{R}_n[X]$.**
2) **Pour $P \in U$ on note $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ les racines de P.**
Montrer que l'application $P \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 3 **. Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes, préciser le domaine de validité des solutions :**

1) $2\dfrac{\partial f}{\partial x}+3\dfrac{\partial f}{\partial y}=4f$ **avec la condition aux limites :** $f(t,t)=t,\ \forall t\in\mathbb{R})$.

   Indication : Étudier $\varphi : t\mapsto f(a+bt,a+ct)$ **avec** a,b,c **bien choisis.**

2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{\partial f}{\partial y}=a$ **où** a **est une constante réelle donnée.**

   Indication : **On utilisera le changement de variable :** $u=x+y,\ v=x-y$.

3) $x\dfrac{\partial f}{\partial x}=y\dfrac{\partial f}{\partial y}$, **en posant** $u=xy,\ v=\dfrac{x}{y}$.

4) $x\dfrac{\partial f}{\partial x}=-y\dfrac{\partial f}{\partial y}$, **en posant** $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$.

5) $y\dfrac{\partial f}{\partial x}-x\dfrac{\partial f}{\partial y}=2f$, **en posant** $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$.

6) $2xy\dfrac{\partial f}{\partial x}+(1+y^2)\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$, **en utilisant, par exemple, le changement de variable :** $x=\dfrac{u^2+v^2}{2}$ **et** $y=\dfrac{u}{v}$.

7) $x^2\dfrac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}+2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}=\alpha(\alpha-1)f$ **où** α **est un réel fixé,** $\alpha\neq\dfrac{1}{2}$.

   On posera $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$.

8) $x^2\dfrac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}+2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}=0$.

   On utilisera le changement de variables : $u=xy,\ v=\dfrac{x}{y}$.

Exercice 4 **.** ***Fonctions harmoniques.***

Une fonction f **réelle de classe** $\mathcal{C}^2$ **sur un ouvert** U **est dite harmonique si elle vérifie l'EDP suivantes :** $\dfrac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}+\dfrac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}=0$.

1) ***Les polynômes complexes sont harmoniques.***

   Soient $P\in\mathbb{C}[X]$, **montrer que la fonction complexe** f **définie par** $f:\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ (x,y) & \longmapsto & P(x+iy).\end{array}$ **est harmonique.**

2) **Soit** $f :]-1,1[\longrightarrow\mathbb{R}$ **de classe** $\mathcal{C}^2$. **On considère** $g:\ \begin{array}{ccc} D\subset\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & f\left(\dfrac{\cos x}{\operatorname{ch} y}\right).\end{array}$

   Déterminer f **pour que** g **soit harmonique.**

3) **Pour** $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, **on pose** $u=x^2-y^2,\ v=2xy$.

   Soit $F\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (u,v) & \longmapsto & F(u,v)\end{array}$ **et** f **définie par :** $f(x,y)=F(u,v)$.

   Montrer que F **harmonique entraîne que** f **est harmonique.**

Exercice 5 **. Soients** $a,b,c\in\mathbb{R}$ **non tous nuls. On considère l'équation aux dérivées partielles :** $(*)\quad a\dfrac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}+b\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+c\dfrac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}=0$. **Soient** $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ **distincts, fixés. On fait le changement de variable :** $u=x+\alpha y,\ v=x+\beta y$.

1) **Écrire l'équation déduite de** $(*)$ **par ce changement de variable.**

2) **En déduire que l'on peut ramener** $(*)$ **à l'une des trois formes réduites :** (1) : $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}=0,\qquad (2) : \dfrac{\partial^2 g}{(\partial u)^2}=0,\qquad (3) : \dfrac{\partial^2 g}{(\partial u)^2}+\dfrac{\partial^2 g}{(\partial v)^2}=0.$

Exercice 6 . *Laplacien.*
Soit $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On pose

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}+\frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}\quad \textbf{laplacien de } f.$$

1) ***Laplacien en coordonnées polaires.***
On pose $g(\rho,\theta)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$.
   a) **Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial\rho}$, $\dfrac{\partial g}{\partial\theta}$, $\dfrac{\partial^2 g}{(\partial\rho)^2}$, $\dfrac{\partial^2 g}{(\partial\theta)^2}$ en fonction des dérivées partielles de f.**
   b) **Exprimer Δf en fonction des dérivées de g.**
2) ***Laplacien en coordonnées sphériques.***
Soient $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, soit
$$\begin{array}{llll}\Phi: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ & (r,\theta,\varphi) & \longmapsto & (x=r\cos\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\cos\varphi, z=r\sin\varphi)\end{array}$$
et $F=f\circ\Phi$. On pose $\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}+\dfrac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}+\dfrac{\partial^2 f}{(\partial z)^2}$ laplacien de f.
Vérifier que : $(\Delta f)\circ\Phi=\dfrac{\partial^2 F}{(\partial r)^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial F}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 F}{(\partial\varphi)^2}-\dfrac{\tan\varphi}{r^2}\dfrac{\partial F}{\partial\varphi}+\dfrac{1}{r^2\cos^2\varphi}\dfrac{\partial^2 F}{(\partial\theta)^2}$.
Pour cet exercice, il est conseillé de prendre la feuille dans le sens de la longueur, et d'y aller calmement, en vérifiant ses calculs.
3) ***Laplacien en dimension n***
Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$.
On définit une application F de $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ dans $\mathbb{R}$ par :
$F(x_1,\dots,x_n)=f(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2})$. Calculer le laplacien ($\Delta F=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{(\partial x_i)^2}$) de F en fonction de f.
4) ***Les isométries conservent le laplacien.***
Soit $\varphi:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ une isométrie pour la norme $\|.\|_2$.
   a) **Montrer que la matrice jacobienne de φ est constante, égale à la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de la partie linéaire de φ.**
   b) **Soit $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que $(\Delta f)\circ\varphi=\Delta(f\circ\varphi)$.**
5) **Soit u une fonction réelle des variables réelles x et y définie par $u(x,y)=(F\circ r)(x,y)$ où $r(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ et F est une fonction reelle d'une variable reelle.**
On pose : $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
   a) **Calculer : $\dfrac{\partial r}{\partial x},\dfrac{\partial r}{\partial y},\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}$. En déduire que $\Delta u=F''(r)+\dfrac{F'(r)}{r}$.**
   b) **En déduire Δu lorsque $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$.**

Exercice 7 . *Formule de Leibniz.*
Soient $f,g\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$de classe $\mathcal{C}^n$. Montrer que

$$\frac{\partial^n(fg)}{\partial x^k\partial y^{n-k}}=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{n-k}C_k^iC_{n-k}^j\frac{\partial^{i+j}f}{\partial x^i\partial y^j}.\frac{\partial^{n-i-j}g}{\partial x^{k-i}\partial y^{n-k-j}}.$$

Exercice 8 . ***Matrice Hessienne et changement de variables affine.***
Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application affine.

1) **Montrer que la matrice jacobienne, J, de φ est constante.**
2) **Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on note**

$$H_f(a,b) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \\ \dfrac{\partial 2}{\partial f}xy(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(a,b) \end{pmatrix} \quad \textbf{matrice Hessienne de } f \textbf{au point } (a,b).$$

Montrer que :

$$H_{f\circ\varphi}(a,b)) = {}^t J.H_f(\varphi(a,b)).J$$

Exercice 9 . ***Contre-exemples au théorème de Schwarz.***

1) **Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction π-périodique de classe $\mathcal{C}^2$. On pose pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:** $g(x, y) = r^2 f(\theta)$ **avec** $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$**.**
   a) **Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0, y)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, 0)$ en fonction de f.**
   b) **En déduire les valeurs de $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0, 0)$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0, 0)$.**
   c) **Construire un exemple précis (donner $g(x, y)$ en fonction de x et y) pour lequel ces deux dérivées sont distinctes.**
2) **(Centrale MP 2003)**
   Soit $f(x, y) = \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq 0$ et $f(0, 0) = 0$.
   a) **Étudier la continuité de f et de ses dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$.**
   b) **Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.**

Étude des extremums.

Exercice 10 . **Chercher les extrémums des fonctions $f(x, y)$ suivantes :**

1) $3xy - x^3 - y^3$
2) $-2(x - y)^2 + x^4 + y^4$
3) $x^2y^2(1 + 3x + 2y)$
4) $2x + y - x^4 - y^4$
5) $\dfrac{xy}{(x + y)(1 + x)(1 + y)}, \ x, y \geq 0$
6) $xe^y + ye^x$
7) $x(\ln^2 x + y^2)$**,** $x > 0$
8) $\sqrt{x^2 + (1 - y)^2} + \sqrt{y^2 + (1 - x)^2}$

Exercice 11 . **Pour $x > 0$ on pose $g(x) = \ln(x) + 2x + 1$.**

1) **Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution $a \in]0, \frac{1}{e}[$.**
2) **Sur** أ$+* \times \mathbb{R}$ **on pose $f(x, y) = x(\ln(x) + x + y^2)$ déterminer le point critique.**
3) **Vérifier que f admet un minimum relatif en ce point et que :** $\min f = -a(a + 1)$.

Exercice 12 . **Soit $\lambda > 1$, on pose $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x > 0\}$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x > 0, y \neq 0\}$, on se propose d'étudier les extremums de la fonction $f(x,y) = x^\lambda y - y^2 - y\ln(x+1) + 1$.**

1) **Pour $x > 0$ on pose $h(x) = x^\lambda - \ln(x+1)$, montrer que l'équation $h'(x) = 0$ admet une seule solution $b \in]0, +\infty[$.**
2) **On pose $h(b) = 2c$, montrer que $c < 0$.**
3) **Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une seule solution $a \in]0, +\infty[$ et que $a > b$.**
4) **Déterminer les points critiques de f, (on les exprimera en fonction de a, b, c)**
5) **Montrer que f admet un seul extremum, que l'on précisera.**

Exercice 13 . **Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.**

1) **Calculer les dérivés partielles des fonctions suivantes :**

$$g_1(x,y) = f(y,x) \qquad g_3(x,y) = f(y, f(x,x))$$

2) **Calculer les dérivés des fonctions suivantes :**

$$h_1(x) = f(x,x) \qquad h_2(x) = f(x, f(x,x))$$

3) **Calculer les dérivés des fonctions suivantes :**

$$h_1(x) = f(u(x), v(x)) \qquad h_2(x) = f(u(x), f(v(x), w(x)))$$

Où u, v, w trois fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 . ***Distances aux sommets d'un triangle.***
Soit $A \in \mathbb{R}^p$ fixé et $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & AM^2 \end{array}$ $\quad g \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$ **(distance euclidienne)**

1) **Calculer les gradients de f et g en un point M.**
2) **Soient A, B, C trois points non alignés du plan. Trouver les points M du plan réalisant le minimum de :**
   a) $MA^2 + MB^2 + MC^2$.
   b) $MA + MB + MC$.
   c) $MA.MB.MC$.

Exercice 15 . ***Aire maximal d'un triangle.***
Soit ABC un triangle de cotés a, b, c.

1) **Calculer l'aire, S, de ABC en fonction de a, b, c.**
2) **Montrer que $\dfrac{S}{a^2 + b^2 + c^2}$ est maximal lorsque ABC est équilatéral.**

Exercice 16 . ***Loi de réfraction.***
Soient dans $\mathbb{R}^2$: $A = (a, 0)$, $B = (b, -c)$ et $M = (x, 0)$ $(a, b, c > 0)$. Un rayon lumineux parcourt la ligne brisée AMB à la vitesse v_1 de A à M et v_2 de M à B. On note $\alpha_1 = (\widehat{\vec{j}, \overrightarrow{MA}})$ $\alpha_2 = (\widehat{-\vec{j}, \overrightarrow{MB}})$.

1) **Faire une figure.**
2) **Montrer que le temps de parcours est minimal lorsque $\dfrac{\sin\alpha_1}{v_1} = \dfrac{\sin\alpha_2}{v_2}$.**

Applications du théorème des fonctions implicites.

Exercice 17 .

1) **On considère la courbe d'équation $e^{x-y} = 1 + 2x + y$. Donner la tangente à cette courbe et la position par rapport à la tangente au point $(0, 0)$.**
2) **Montrer que l'équation : $x^3 + y^3 - 3xy = 1$ définit au voisinage de 0 une fonction implicite : $y = \varphi(x)$ telle que $\varphi(0) = 1$.**
   Donner le DL de φ en 0 à l'ordre 3.
3) **Montrer que l'égalité $2e^{x+y} + y - x = 0$ définit $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(1, -1)$.**
   Calculer $\varphi'(1)$ et $\varphi''(1)$.
4) **Soit $f(x, y) = x \ln x - y \ln y,\ x, y > 0$.**
   Pour $k \in \mathbb{R}$, on considère la courbe γ_k d'équation $f(x, y) = k$.
   a) **Suivant la position de $(a, b) \in \gamma_k$, préciser l'orientation de la tangente à γ_k en (a, b).**
   b) **Dresser le tableau de variations de $\phi(t) = t \ln t$.**
   c) **Dessiner γ_0. (Étudier en particulier les points $(0, 1), (1, 0)$ et $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$ à l'aide de DL)**
   d) **Indiquer l'allure générale des courbes γ_k suivant le signe de k.**
5) **Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de de classe $\mathcal{C}^1$.**
   a) **Montrer que, sous une condition à préciser, l'équation $y - zx = f(z)$ définit localement z fonction implicite de x et y.**
   b) **Montrer que l'on a alors : $\dfrac{\partial z}{\partial x} + z\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.**

Divers.

Exercice 18 . $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes.

1) a) **Montrer que $f(x, y) = (x+y, xy)$ induit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V où U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ à préciser.**
   b) **Chercher l'expression de f^{-1} et vérifier que le produit des matrices jacobiennes est égal à I.**
2) **Soit** $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (\mathrm{e}^{2y} + \mathrm{e}^{2z}, \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{2z}, x - y). \end{array}$
   Montrer que f induit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur un ouvert à préciser.

Exercice 19 . Inégalités de Taylor-Lagrange.

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ dont les dérivées secondes sont bornées : $\forall\ i, j,\ \forall\ A \in U,\ \left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A)\right| \leq M.$

1) **Montrer que :** $\forall\ A, B \in U,\ \left|f(B) - f(A) - df_A(\overrightarrow{AB})\right| \leq \dfrac{M\|\overrightarrow{AB}\|_1^2}{2}$.
2) **Montrer que :** $\forall\ A, B \in U,\ \left|f(B) - f(A) - df_C(\overrightarrow{AB})\right| \leq \dfrac{M\|\overrightarrow{AB}\|_1^2}{4}$ **où C est le milieu de $[A, B]$.**

Fin
à la prochaine