© www.chez.com/myismail

Spé1 Série: Dérivation d'une série de fonction
Le 17/11/99 Intégrale dépendant d'un paramétre

Exercice 1:

Soit f:x→$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\frac{3}{2}}}$.Montrer que f est définie et continue sur [-1,1] de classe C^1sur[-1,1[
f est elle dérivable à gauche en 1?

Exercice 2:

Soit f:x→$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx^2)}{n^{3/2}}$.
1) Montrer que est f définie et continue sur $\mathbb{R}^+$de classe C^1sur]0,∞[.
2) Montrer que f ' admet une limite finie à droite en 0,déduire que f est de classe C^1sur $\mathbb{R}^+$

Exercice 3:

Soit f:x→$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4n+1}$.Montrer que f est définie et continue sur [-1,1[
Exprimer f(x) au moyen de fonctions élémentaires.

Exercice 4:

On définie pour x∈ $\mathbb{R}^+$ F(x)=$\int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}dt$
1) Montrer que F est de classe C^1, calculer F(0) et $\lim_{x\to\infty}$ F(x)
2) Montrer que F(x)=$\frac{\pi}{4} - \left(\int_0^x e^{-u^2}du\right)^2$ en déduire la valeur de $\int_0^\infty e^{-u^2}du$

Exercice 5:

Pour x >-1 on se propose de calculer F(x)=$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+x\sin^2(t))dt$
1) Montrer que F est dérivable sur]1,∞[et que F'(x)=$\frac{\pi}{2x}(1-\frac{1}{\sqrt{1+x}})$
2) Déduire l'expression de F

Exercice 6:

a) vérifier que f: x→ $\int_0^\pi \ln(1-2x\cos(t)+x^2)dt$ est bien définie sur$\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$
et calculer f($\frac{1}{x}$) en fonction de f(x)?
b) Montrer que f est de classe C^1 sur]-1,1[calculer f' puis f que vaut f(x) si $|x|>1$

Exercice 7:

Montrer que $\forall x \in]-1,\infty[$ on a $\int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}dt = \frac{\ln(2)}{2}arctg(x) + \frac{\pi}{8}\ln(1+x^2) - \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt$
En déduire $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt$

Exercice 8:

a) Montrer que $\int_0^\pi \frac{dt}{a+b\cos(t)} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$ $(a>b>0)$.
b) Déduire par dérivation le calcul de:$\int_0^\pi \frac{dt}{(a+b\cos(t))^2}$ et $\int_0^\pi \frac{\cos(t)}{(a+b\cos(t))^2}dt$

Exercice 9:

Soit φ :I→ $\mathbb{R}$ de classe C^n, a∈I
$\psi : x \to \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}$ si x≠ a et $\psi(a) = \varphi'(a)$
Montrer que ψest de classe C^{n-1}sur I .
Montrer que l'application x→ $\begin{cases} \frac{\operatorname{sh} x}{\sin x} & \text{si } x \in]0,\pi[\\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ est de classe C^∞ sur[0,π[

Exercice 10:

Calculer $\int_0^\pi \ln\frac{b-\cos t}{a-\cos t}dt$ où b>a>1 (utiliser Fubini)