MP-Maths.
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

Source disponible sur :
©http://www.chez.com/myismail

Exercice 1. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.*

1) *Montrer que $I + M$ est inversible*
Indication : Si $MX = 0$, calculer ${}^t(MX)(MX)$.

2) *Soit $A = (I - M)(I + M)^{-1}$. Montrer que ${}^tA = A^{-1}$.*

Exercice 2. *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.*
On note $C = I_n - AB$ et $D = I_p - BA$.

1) *Montrer que si C est inversible, alors D l'est aussi*
Indication : Résoudre $DX = 0$.

2) *Le cas échéant, exprimer D^{-1} en fonction de A, B, C^{-1}.*

3) *En déduire que AB et BA ont les mêmes valeurs propres non nulles.*

4) *Examiner le cas de la valeur propre 0 si $n = p$.*

Exercice 3. *On note $U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A} = \{aU + bI,\ a, b \in \mathbb{R}\}$ $(n \geq 2)$.*

1) *Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

2) *Soit $M = aU + bI \in \mathcal{A}$. Montrer que M possède un inverse dans $\mathcal{A}$ si et seulement si $b(b+na) \neq 0$, et le cas échéant, donner M^{-1}.*

3) *Soit $M = aU + bI \in \mathcal{A}$. Exprmier M^n en fonction de U et I*

4) *Trouver les matrices $M \in \mathcal{A}$ vérifiant : $M^n = I$.*

Exercice 4. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a : $tr\,({}^tXAX) \geq 0$.*
Montrer que les noyaux de A et ${}^tA$ sont égaux.
Indication : Décomposer A en symétrique + antisymétrique.

Exercice 5. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(M)$.*
Montrer que $\mathrm{Re}(\lambda)$ est compris entre la plus grande et la plus petite valeur propre de $\dfrac{1}{2}(M + M^*)$.

Exercice 6. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $B = {}^tAA$.*

1) *Montrer que : $\forall\ Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tYY = 0 \Longleftrightarrow Y = 0$.*

2) *Montrer que : $\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $BX = 0 \Longleftrightarrow AX = 0$.*

3) *En déduire que $rg(A) = rg(B)$.*

4) *Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $rg(A) \neq rg({}^tAA)$.*

Exercice 7. *Soit $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $A = \Big(P(i + j)\Big) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

1) *Développer $P(i + j)$ par la formule de Taylor et écrire A comme produit de deux matrices.*

2) *En déduire $\det A$.*

Exercice 8. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et B la matrice obtenue en échangeant dans A les colonnes i et j.*

1) *Montrer que B est aussi inversible.*

2) *Comment passe-t-on de A^{-1} à B^{-1} ?*

Exercice 9. *Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie, u inversible, v nilpotent, avec $u \circ v = v \circ u$.*

1) *Démontrer que* $\det v = 0$.

2) *Chercher le polynôme caractéristique de v.*
En déduire que $\det(id_E + v) = 1$.

3) *Démontrer que* $\det(u + v) = \det u$.

Exercice 10. .

1) *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.*
Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

2) *Chercher A, B ne commutant pas telles que* $\det(A^2 + B^2) < 0$.

Exercice 11. *Soient* $A = \begin{pmatrix} 29 & 38 & -18 \\ -11 & -14 & 7 \\ 20 & 27 & -12 \end{pmatrix}$ *et*
$B = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.
Montrer que A et B ont même rang, même déterminant, même trace mais ne sont pas semblables (calculer $(A - I)^2$ et $(B - I)^2$

Exercice 12. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et* $U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

1) *Démontrer que :* $\det(A + \alpha U) = \det A + \alpha \sum$ *cofacteurs de A.*

2) *En déduire la valeur de* $D(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \dots & c & a \end{pmatrix}$,

Étudier les cas : pour $b \neq c$ et $b = c$.

Exercice 13. *Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.*
Montrer que $\det(I_p - AB) = \det(I_q - BA)$.
Commencer par le cas où A est la matrice canonique de rang r.

Exercice 14. *Calculer les déterminants suivants :*

1) $\begin{pmatrix} a & b & & 0 \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & c & a \end{pmatrix}$ ***Matrice tridiagonale.***

2) $\begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n+p}{0} & \binom{n+p}{1} & \dots & \binom{n+p}{p} \end{pmatrix}$.

Déterminant de Pascal

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$. ***Déterminant circulant .***

Exercice 15. ***Changements de signe.***
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A' = ((-1)^{i+j} a_{ij})$.
Montrer que $\det A = det A'$.

Exercice 16. ***Factorisation de polynômes.***
Déterminer les cas d'annulation des déterminants suivants, puis les calculer :

1) $\begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ & 1-x & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & n-x \end{pmatrix}$.

2) $\begin{pmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & x \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{a+x} & \dfrac{1}{a+y} & \dfrac{1}{a+z} \\ \dfrac{1}{b+x} & \dfrac{1}{b+y} & \dfrac{1}{b+z} \\ \dfrac{1}{c+x} & \dfrac{1}{c+y} & \dfrac{1}{c+z} \end{pmatrix}$.

Exercice 17. ***Calcul par dérivation.***

1) *Soient* $a, b, c, d : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *des fonctions dérivables et* $f(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}$.
Montrer que f *est dérivable et que :*
$f'(x) = \begin{pmatrix} a'(x) & b(x) \\ c'(x) & d(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a(x) & b'(x) \\ c(x) & d'(x) \end{pmatrix}$.

2) *Généraliser à un déterminant* $n \times n$.

3) *Application : Calculer* $\begin{pmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 1 & \cos(x+\alpha) & \sin(x+\alpha) \\ 1 & \cos(x+\beta) & \sin(x+\beta) \end{pmatrix}$.

Exercice 18. ***Déterminants de Vandermonde.***
Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. *Le déterminant de Vandermonde associé aux* a_i *est :* $V(a_1, \dots, a_n) = \det\left(a_i^{j-1}\right)$.

1) *Calculer et factoriser* $V(a,b)$ *et* $V(a,b,c)$.

2) *Pour* $x \in \mathbb{K}$, *montrer que :*
$$V(a_1, \dots, a_n, x) = V(a_1, \dots, a_n) \prod_{i=1}^{n} (x - a_i).$$

3) *En déduire l'expression générale de* $V(a_1, \dots, a_n)$.

4) *Soient* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.
Mettre le déterminant : $\det\Big(\cos((j-1)\alpha_i)\Big)$ *sous la forme d'un déterminant de Vandermonde.*

Exercice 19. ***Déterminant par blocs.***

1) *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$. *Démontrer que* $\det M = \det(A+B)\det(A-B)$.

2) *Soient* $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *avec* A *inversible et* $AC = CA$. *On considère* $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.
Montrer que $\det M = \det(AD - CB)$.

Exercice 20. ***Racines de l'unité.***
On note $\omega = e^{2i\pi/n}$, $\alpha = e^{i\pi/n}$ *et* D *le déterminant* $n \times n$: $D = \det\left(\omega^{(k-1)(l-1)}\right)_{1 \le k,l \le n}$.

1) *Calculer* D^2.

2) *Montrer que* $D = \prod_{k<l} (\omega^l - \omega^k) = \prod_{k<l} \left(\alpha^{k+l} \cdot 2i \sin \dfrac{l-k}{n} \pi \right)$.

3) *Exprimer* D *sous forme trigonométrique.*

Exercice 21. ***Coefficients du binôme.***

1) *Soit* $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{Q})$ *telle que* $a_{ij} = \begin{pmatrix} j-1 \\ i-1 \end{pmatrix}$.

a) *Interpréter* A *comme la matrice d'un endomorphisme simple de* $\mathbb{Q}_n[X]$.

b) *En déduire la matrice* A^{-1}.

2) *Soit* $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que* $a_{ij} = (-1)^{n-j}\begin{pmatrix} n-j \\ i-1 \end{pmatrix}$.

a) *Interpréter* A *comme la matrice de l'endomorphisme de* $\mathbb{K}_{n-1}[X]$, $\quad \phi(P) = (-X-1)^{n-1}P\left(-\dfrac{1}{X+1}\right)$.

b) *En déduire* A^3.

Exercice 22. ***Problème d'interpolation de Lagrange.***

Soit A *un anneau commutatif,* $x_1, \ldots, x_n \in A$.

1) *Démontrer l'équivalence entre les propositions suivantes :*

a) *Le déterminant de Vandermonde de* $x_1, \ldots, x_n$ *est un élément inversible de* A.

b) *Pour tous* $y_1, \ldots, y_n \in A$, *il existe un unique polynôme* $P \in A_{n-1}[X]$ *tel que* $P(x_i) = y_i$ *pour* $i = 1, \ldots, n$.

2) *Donner un exemple d'anneau* A *et un problème d'interpolation dans* A *(en des points* x_i *distincts) n'ayant pas de solution.*

Exercice 23. ***Matrices centrosymétriques.***

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *On dit que* A *est centro-symétrique si pour tous* i, j : $a_{n+1-i,n+1-j} = a_{ij}$.

1) *Montrer que si* A *et* B *sont centro-symétriques, il en est de même de* AB.

2) *Montrer aussi* A *est centro-symétrique et inversible alors* A^{-1} *est aussi centro-symétrique.*

Exercice 24. ***Matrices de rang 1.***

1) *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Montrer que :*
$rg(M) = 1 \Longleftrightarrow$ *il existe* C, *colonne et* L, *ligne, non nulles, telles que* $M = CL$.

2) *Dans le cas où* M *est symétrique, montrer qu'il existe* $\lambda \in \mathbb{K}^*$ *tel que* $L = \lambda^t C$.

3) *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *de rang 1.*
Montrer que A *est une matrice de projection si et seulement si* $tr\, A = 1$.

Exercice 25. ***Matrices stochastiques.***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose :*

$$\mathcal{D} = \left\{ A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tel que : } \forall\, i, j,\ a_{ij} \geq 0 \text{ et } \forall\, i,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \right\}.$$

1) *Montrer que* $\mathcal{D}$ *est stable par multiplication.*

2) *Déterminer les matrices* $A \in \mathcal{D}$ *inversibles telles que*

Exercice 26. ***Matrices antisymétriques.***

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *antisymétrique.*

1) *On suppose* $a_{12} \neq 0$, *et on décompose* A *sous la forme :*
$A = \begin{pmatrix} J & U \\ -^tU & V \end{pmatrix}$ *avec* $J = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}$.
Soit $P = \begin{pmatrix} I_2 & -J^{-1}U \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$.

a) *Montrer que* P *existe et est inversible.*

b) *Calculer* AP.

c) *En déduire que* $rg(A) = 2 + rg({}^tUJ^{-1}U + V)$.

2) *Dans le cas général, montrer que* $rg(A)$ *est pair.*

Exercice 27. ***Matrice à diagonale dominante.***
Soit $M=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que M est à diagonale dominante si : $\forall\ i,\ |a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$.

1) *On transforme M en $M'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ 0 & & & \\ \vdots & & M_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ par la méthode du pivot. Montrer que M_1 est à diagonale dominante.*
2) *En déduire que M est inversible.*

Exercice 28. ***Centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.***
Le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On note (E_{ij}) la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) *Déterminer Le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
2) ***Centre de $GL_n(\mathbb{K})$.***
   a) *Montrer que $F_{ij}=I+E_{ij}$ est inversible.*
   b) *En déduire que vect$\big(GL_n(\mathbb{K})\big)=\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
   c) *Quel est le centre de $GL_n(\mathbb{K})$?*
   d) *Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ ayant même matrice dans toutes les bases de E. Montrer que f est une homothétie.*
3) ***Centre des matrices triangulaires unipotentes.***
   On note $\mathcal{G}=\{A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $a_{ij}=0$ si $i>j$ et $a_{ii}=1\}$.
   a) *Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$.*
   b) *En utilisant la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, déterminer le centre de $\mathcal{G}$, et montrer que c'est un groupe commutatif isomorphe à $(\mathbb{K},+)$.*

Exercice 29. ***Matrices en damier.***
Soit $M=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que M est en damier si $a_{ij}=0$ pour $j-i$ impair. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices $n\times n$ en damier.

1) *Montrer que $\mathcal{D}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
2) *Quelle est sa dimension ?*

Exercice 30. ***Matrices magiques.***
Une matrice carrée, $n\times n$, M est dite magique si les sommes des coefficients de M par ligne et par colonne sont constantes.
$\mathcal{M}$ designera l'ensemble de telle matrice.
On note $s(M)$ leur valeur commune.
Soit $U=\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1\\ \vdots & & \vdots\\ 1 & \dots & 1\end{pmatrix}$

1) *Montrer que $\mathcal{M}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que $s:\mathcal{M}\longrightarrow\mathbb{K}$ est un morphisme d'algèbre*
   (calculer MU et UM).
2) *Si M est magique inversible, montrer que M^{-1} est aussi magique.*
3) *Montrer que $\mathcal{M}$ est la somme directe du sev des matrices magiques symétriques et du sev des matrices magiques anti-symétriques.*
4) *Pour $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note ϕ_M l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M.*
   Soit $\mathcal{H}=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que : $x_1+\dots+x_n=0\}$ et $\mathcal{K}=\{(x,\dots,x)\in\mathbb{K}^n\}$.
   a) *Montrer que : $M\in\mathcal{M}\Longleftrightarrow\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ sont stables par ϕ_M.*
   b) *En déduire dim$(\mathcal{M})$.*

Exercice 31. ***Commutant d'une matrice diagonale.***
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *tel que :* $AM = MA\}$ *s'appelle le commutant de* A.

1) *Montrer que* $\mathcal{C}_A$ *est une sous-algèbre de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2) *Soit* $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ *une matrice diagonale dont tous les* λ_i *sont distincts.*

a) *Chercher* $\mathcal{C}_A$.

b) *Soit* $\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & MA - AM \end{array}$

Montrer que $Im\phi$ *est l'ensemble des matrices à diagonale nulle.*

Exercice 32. ***Juxtaposition de matrices.***
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$. *On considère* $C = (A\ B) \in \mathcal{M}_{n,p+q}(\mathbb{K})$.
Montrer que : $rg(C) = rg(A) \Longleftrightarrow \exists\ P \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ *tel que :* $B = AP$.

Exercice 33. ***Matrices triangulaires nilpotentes.***

1) *Soit* A *une matrice triangulaire à diagonale nulle.*
Montrer que A *est nilpotente.*

2) *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *une matrice nilpotente d'indice* n *et* ϕ *l'endomorphisme de* $\mathbb{K}^n$ *associé.*
On note $E_i = Ker\phi^i$, *et* $\vec{e}_i$ *un vecteur quelconque choisi dans* $E_i \setminus E_{i-1}$ $(\vec{e}_1 \in E_1 \setminus \{\vec{0}\})$.

a) *Justifier l'existence de* $\vec{e}_i$.

b) *Montrer que la famille* $(\vec{e}_i)$ *est une base de* $\mathbb{K}^n$.

c) *En déduire que* A *est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.*

Exercice 34. ***Autour de la trace***

1) ***Matrices de trace nulle.***
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *non scalaire telle que* $tr\ M = 0$.

a) *Montrer qu'il existe une matrice colonne* X_1 *telle que* MX_1 *ne soit pas colinéaire à* X_1.

b) *En déduire que* M *est semblable à une matrice*
$N = \begin{pmatrix} 0 & \ldots \\ \vdots & M_1 \end{pmatrix}$ *où* $M_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ *et* $tr\ M_1 = 0$.

c) *Montrer que* M *est semblable à une matrice à diagonale nulle.*

d) *En utilisant l'exercice du commutant d'une matrice diagonale, montrer qu'il existe* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *telles que* $M = AB - BA$.

2) ***Forme bilinéaire trace.***

a) *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *non nulle.*
Montrer que l'application $f_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ X & \longmapsto & tr\ (AX) \end{array}$
est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

b) *Réciproquement : Soit phi :* $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ *une forme linéaire quelconque.*
Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *telle que* $\phi = f_A$
Indication : on pourra considérer l'application $A \mapsto f_A$.

c) *Soit* $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ *une forme linéaire vérifiant :* $\forall\ X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\phi(XY) = \phi(YX)$.
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ *tel que* $\phi = \lambda\ tr$.

3) ***Une application.***
Soit H *un hyperplan de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(n \geq 2)$.

a) *Montrer qu'il existe* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que* $H = \{M$ *tel que :* $tr\ (AM) = 0\}$.

b) *En déduire que* H *contient une matrice inversible.*

Exercice 35. ***Comatrice.***

1) *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *triangulaire.*
Montrer que $\operatorname{com} A$ *est aussi triangulaire.*

2) *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. Étudier le rang de* $com(A)$ *en fonction du rang de* A*.Montrer que :*
Si $rg(A) = n, \;\; rg(com(A)) = n$.
Si $rg(A) = n-1, \;\; rg(com(A)) = 1$.
Si $rg(A) \leq n-2, \;\; rg(com(A)) = 0$.

3) *Soit* $n \geq 2$ *et* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Calculer $\operatorname{com}(\operatorname{com} A)$ *dans le cas où* A *est inversible.*

b) Si $rgA \leq n-2$*, démontrer que* $\operatorname{com} A = 0$.

c) Si $rgA = n-1$*, démontrer que* $rg(\operatorname{com} A) = 1$.

d) Dans le cas général, démontrer que :
$\operatorname{com}(\operatorname{com} A) = (\det A)^{n-2} A$.

4) *Soit* $n \geq 2$ *et* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Si A *et* B *sont inversibles, démontrer que*
$\operatorname{com}(AB) = (\operatorname{com} A)(\operatorname{com} B)$.

b) Démontrer le même résultat dans le cas général, en considérant les scalaires λ *tels que* $A - \lambda I$ *et* $B - \lambda I$ *soient inversibles.*

c) En déduire que si A *et* B *sont semblables, alors* $\operatorname{com} A$ *et* $\operatorname{com} B$ *le sont.*

.

Fin.