Spé1 Série:Equations différentielles linéaires 25/02/00

Exercice 1:

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ l'équation $X' = AX$ où $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Exercice 2:

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ l'équation $X' = AX + B$ où B=$\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ -3 & 6 & 9 \\ -3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Exercice 3:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x''' - 2x'' - x' + 2x = \sin t$

Exercice 4:

Soit l'équation différentielle: $t^2(1-t)x'' - t(1+t)x' + x = 0$.(1)

1) Déterminer les solutions de (1) développables en séries entières.

2) Résoudre (1) sur chacun des intervalles:]0,1[,]1,+∞[,[0,+∞[

Exercice 5:

Soit $\omega \in \mathbb{R}^3$, préciser la nature des trajectoires des solutions de $x' = \omega \wedge x$

Exercice 6:

Résoudre dans]0,+∞[l'équation $t^2x'' + tx' + x = 2t$

On cherchera des solutions particulières de l'équation homogène de la forme $t \to t^\alpha$

Exercice 7:

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tq $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) + f'(t) = 0$

Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$

Exercice 8:

Soit $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée.

Montrer que l'équation $x' = b - x$ admet une unique solution bornée

Exercice 9:

Soit q:[0,+∞[$\to \mathbb{R}$ continue intégrable.

1)f étant une solution bornée sur [0,+∞[de (E): $x'' + qx = 0$

Etudier $\lim\limits_{+\infty} f'$.

2) Montrer que (E) a des solutions non bornées.

Exercice 10:

Soient $p, q : I \to \mathbb{R}$ continues.

On considère l'équation linéaire scalaire d'ordre 2: $x'' = px' + qx$.(1)

1)Soit f une solution non nulle de (1) .

a)Montrer que les zéros de f sont isolés

b)Déduire que sur tout segment inclus dans I , f n'a qu'un nombre fini de zéros

2)Soit (f, g) une base de l'ensemble des solutions de (1).

Montrer qu'entre deux zéros consécutifs de f il ya un unique zéro de g

(On examinera le wronskien de f et g)