Spé 1: Série : Equations différentielles non linéaires Le 03 /02/00

Exercice 1:

A l'aide du changement $u = \frac{x}{t}$,donner les solutions maximales de : $x' = \frac{x}{t-x}$

Exercice 2:

Donner la solution maximale de $x' + tx + x^2 = 0,\ x(0) = 1$.

Exercice 3:

Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ la solution maximale de : $\begin{cases} x' = e^{tx} \\ x(0) = 0 \end{cases}$

1) Montrer que $I = -I$ et φ impaire.

2) Soit $(a,b) \in I^2$ tq $0 < a < b$ montrer que $\int_a^b x'(t)\exp(-t\,x(t))dt \leq \frac{1}{a}$

3)En déduire que I est borné. 4) Donner l'allure de la trajectoire de φ

Exercice 4:

Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une solution maximale de $x' = x^2 + t^2$.

1) Soit $(a,b) \in I^2$ tq $a^2 \geq 1$, $b^2 \geq 1$ et $a \leq b$

montrer que $b - a \leq \arctan\varphi(b) - \arctan\varphi(a)$

2) En déduire que I est borné et donner l'allure de la trajectoire de φ

Exercice 5:

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $F : U \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 et S le système $\frac{dM}{dt} = F(M)$

Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ une solution maximale non injective de S , montrer que $I = \mathbb{R}$ et φ périodique

Exercice 6:

Donner la solution maximale du système: $x' = \frac{y}{x}$,$y' = \frac{y}{x}$,$x(0) = 1, y(0) = -1$.

Exercice 7:

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont la différentielle ne s'annule pas sur U.

Vérifier que les courbes intégrales du système : $x' = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$,$y' = -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.

ont des équations cartésiennes dela forme $f(x,y) = c$ où c est une constante .

Application : Donner les équations cartésiennes des courbes intégrales du système : $x' = y^2 - x$, $y' = y - x^2$

Exercice 8:

On considère l'équation autonome d'ordre 2 :(E) : $x'' = f(x)$,$f \in C^1(D,\mathbb{R})$

D intrevalle ouvert de $\mathbb{R}$ .Soit φ une solution maximale de (E),définie sur I.

1)On suppose qu'il existe $a \in I$ tq $\varphi'(a)$=0 montrer que : I=$2a - I$ et $\forall t \in I$,$\varphi(2a - t)$=$\varphi(t)$.

2)Déduire que si φ' s'annule au moins deux fois sur I alors I= $\mathbb{R}$ et φ est périodique .

3)Donner l'allure des trajectoires des solutions périodiques.

Exercice 9:

Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ la solution maximale de : $x'' = \sin x,\ x(0) = \frac{\pi}{3}$, $x'(0) = 0$.

1) Montrer que :

a)$I = -I$ et φ paire. b)$\varphi'^2 = 1 - 2\cos\varphi$ et $\varphi(I) \subset \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.

c)$I = \mathbb{R}$ (on pourra utiliser le critère de Cauchy).

2) Soit $f : \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right] \to [0,c]$, $x \mapsto \int_{\frac{\pi}{3}}^{x} \frac{du}{\sqrt{1-2\cos u}}$ avec $c = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \frac{du}{\sqrt{1-2\cos u}}$

vérifier que f est bien définie,bijective et $\varphi_{/[0,c]} = f^{-1}$

3)Montrer que φ est $2c$ périodique et donner l'allure de sa trajectoire.