Spé 1: Série : Espaces préhilbertiens Le 11/02/00

Exercice 1 :

Dans $\mathbb{R}^4$, trouver la matrice de la projection orthogonale sur $vect(e_1, e_2, e_3)$
avec $e_1 = (1,1,1,0)$, $e_2 = (1,1,0,1)$, $e_3 = (1,1,-1,2)$

Exercice 2:

E un espace préhilbertien complexe ,$(x,y) \in E^2$
Etablir l'inégalité de Cauchy-schwarz et préciser le cas d'égalité en considérant:
$\| \|x\|^2 y - (x|y)x \|^2$ où $\|x\|$ désigne $\sqrt{(x|x)}$

Exercice 3 :

E un espace euclidien , f une application de E dans E vérifiant :
$\forall (x,y) \in E^2, d(f(x),f(y)) = d(x,y)$
Montrer que $f - f(0) \in O(E)$

Exercice 4 :

$A \in M_n(\mathbb{C})$, déterminer une matrice $A^* \in M_n(\mathbb{C})$ tq $\forall X,Y \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ $(AX|Y) = (X|A^*Y)$
En déduire la nature des valeurs propres complexes de A dans les cas suivants
1)$A^* = A$ 2) $A \in O_n(\mathbb{R})$ 3) $A \in M_n(\mathbb{R})$ et A antisymétrique

Exercice 5 :

Montrer les inégalités suivantes et donner le cas d'égalité:
1) $A \in M_n(\mathbb{C}), |Tr(A)|^2 \leq nTr({}^t\bar{A}\,A)$
2) $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in O_n(\mathbb{R}), \left|\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}\right| \leq n$

Exercice 6 :

E un espace euclidien et $v \in L(E)$ tq $Tr(v^*v) = 0$, montrer que $v = 0$

Application:

Soit $u \in L(E)$ tq $u^2 = uu^*$, montrer que $u = u^*$

Exercice 7 :

E un espace euclidien et $v \in L(E)$.
on suppose que v est symétrique positif et $Tr(\ v) = 0$ montrer que $v = 0$

Application:

Soit $u \in L(E)$ tq $\forall x \in E : \|u^*(x)\| \leq \|u(x)\|$
Montrer que : $u^*\,u = u\,u^*$ et $E = Ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$

Exercice 8 :

E un espace euclidien et $u \in L(E)$. tq $\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|$
1)Montrer que $\forall x \in E, \|u^*(x)\| \leq \|x\|$
2)Montrer que $u(x) = x$ ssi $u^*(x) = x$
3) En déduire que $E = Ker(u - id) \oplus \mathrm{Im}(u - id)$

Exercice 9 :

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $C_1,..,C_n$ les vecteurs colonnes de A
1) On suppose que $(C_1,..,C_n)$ est une famille orthogonale.
Montrer que $(\det A)^2 = \|C_1\|^2 ... \|C_n\|^2$
2) En général ,montrer que $(\det A)^2 \leq \|C_1\|^2 ... \|C_n\|^2$, donner le cas d'égalité.

Exercice 10 :

E un espace euclidien et f un endomorphisme antisymétrique de E
Montrer que $I + f$ inversible et $(I - f)(I + f)^{-1} \in O^+(E)$

Exercice 11 :

E un espace euclidien, u un endomorphisme symétrique positif de E
Montrer qu'il existe un unique endomorphisme symétrique positif v tq $v^2 = u$

Exercice 12 :

E un espace euclidien , $u \in L(E)$
1)Montrer qu'il existe un unique g symétrique positif tq $u^*u = g^2$

Vérifier que $Ker(g) = Ker(u)$ et $\forall x \in E, \|g(x)\| = \|u(x)\|$
2)Déduire qu'il existe un couple (f, g), tq f orthogonal , g symétrique positif ,$u = fg$
et que ce couple est unique si on suppose de plus u inversible.