spé1 **série :Espaces vectoriels,applications linéaires** le 12/12/99

EXERCICE 1:

E un ev de dimension finie , u et v deux endomorphismes de E
Montrer qu'il existe un endomorphisme w de E tq wov=u ssi Ker v $\subset$Ker u
Application:

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & k \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Résoudre dans $M_3(\mathbb{R})$ l'équation BC=A

EXERCICE 2 :

Soit E la partie de $M_3(\mathbb{Q})$ formée des éléments de la forme:

$$M(a,b,c)=\begin{bmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{bmatrix} \text{ où } (a,b,c) \in \mathbb{Q}^3$$

Montrer que E est une $\mathbb{Q}$ algèbre engendré par une matrice B dont on déterminera le polynôme minimal
En déduire que E est un corps.

EXERCICE 3 :

Montrer qu'à toute forme linéaire f de $M_n(\mathbb{K})$ on peut associer une matrice F unique telle que f(A)=Tr(AF) pour toute matrice $A\in M_n(\mathbb{K})$
Montrer que toute forme linéaire f de $M_n(\mathbb{K})$ qui vérifie f(AB)=f(BA) quels que soient $A,B\in M_n(\mathbb{K})$,est de la forme $f(A)=\lambda \mathrm{Tr}(A)$,où $\lambda \in \mathbb{K}$.

EXERCICE 4:

E un ev de dimension finie $n \geq 2, u \in L(E), rgu = 1$.
Montrer que le polynôme minimal de u est $X^2 - tr(u)\, X$

EXERCICE 5:

E un ev de dimension finie, u un endomorphisme de E
Montrer que dans les cas suivants u est une homothétie:
1) Toute droite de E est stable par u
2) Tout hyperplan de E est stable par u

EXERCICE 6 :

Soit $A\in M_n(\mathbb{C})$ tq $\forall B \in O_n(\mathbb{R})$,AB=BA montrer que :$\exists\lambda \in \mathbb{C}$ tq $A=\lambda I_n$

EXERCICE 7 :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f\in L(E)$.
On dit que f est cyclique s'il existe x_0 de E tq $B_{x_0} =(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E
Dans la suite f est supposé cyclique.
1)Déterminer le polynôme minimal de f en fonction des coordonnées de $f^n(x_0)$ dans B_{x_0}.
2)Soit $g\in L(E)$, montrer que fog=gof ssi $g\in \mathbb{K}[f]$

EXERCICE 8:

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$.On suppose qu'il existe un plus petit $n\in \mathbb{N}^*$tq $\alpha^n \in \mathbb{Q}$.
Prouver que la famille $(1, \alpha, ..., \alpha^{n-1})$ est libre sur $\mathbb{Q}$.

EXERCICE 9:

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u\in L(E)$.
Pour $k\in \mathbb{N}$, notons $N_k = Ker\ u^k, I_k = \mathrm{Im}\, u^k, d_k = \dim N_{k+1} - \dim N_k$
1) Montrer que $d_k = \dim(N_1 \cap I_k)$, déduire que la suite $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2) On suppose que u est nilpotent et $\dim N_1 = 1$, montrer que :$\forall k \in [1,n]$ $\dim N_k = k$.

EXERCICE 10:

Soit A$\in M_n(\mathbb{C})$ tq,$\forall i \in [1,n]$, $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ .Montrer que A est inversible.

EXERCICE 11 :

Déterminer l'inverse de la (n,n) matrice A tq: $a_{ii} = i$; $a_{ij} = 1$ si i >j ; $a_{ij} = 0$ si i<j .

EXERCICE 12:

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et u$\in L(E)$

1) Montrer que si u n'est pas une homothétie,il existe une base $(e_1,..e_n)$ de E tq $u(e_1) = e_2$

2) Montrer que si la trace de u est nulle , il existe une base de E dans laquelle :
la diagonale de la matrice de u ne contient que des zéros (on raisonnera par récurrence).

EXERCICE 13:

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et u$\in L(E)$ tq $u^2 = -id_E$

1)Soit F un sev de E tq F$\cap$u(F)={0}montrer que:
si $x \notin F\oplus u(F)$ alors $F'\cap u(F')=\{0\}$ où $F'=F\oplus\mathbb{R}x$

2) Déduire qu'ilexiste une base e de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs:

$\mathrm{Mat}_e(u) = diag(A,...,A)$ où A=$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

EXERCICE 14:

$(x_i)_{1\leq i\leq n}$ des réels deux à deux distincts ,pour i$\in [1,n]$ et P$\in$E= $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on pose:
$f_i(P) = P(x_i)$ et $g_i(P) = P'(x_i)$.

1)Montrer que $(f_1,...,f_n,g_1,...,g_n)$ est une base de E^* et déterminer sa base préduale.

2)Pour $(y_1,...,y_n,y'_1,...,y'_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, expliciter l'unique P$\in$E tq $\forall i \in [1,n]$ $P(x_i)=y_i$ et $P'(x_i)=y'_i$

EXERCICE 15:

Soit $SL_n(\mathbb{K}) = \{ A\in GL_n(\mathbb{K})$ tq dét(A)=1$\}$, n étant un entier ≥ 2.

1)Vérifier que $SL_n(\mathbb{K})$ est un sous groupe de $GL_n(\mathbb{K})$

2) Pour A$\in GL_n(\mathbb{K})$ montrer qu'il existe des matrices de transvections $T_1,...,T_k,T'_1,...T'_l$ tq:
$A=T_1...T_k\, diag(1,...,1,dét(A))\, T'_1...T'_l$

3)En déduire que $SL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections et $GL_n(\mathbb{K})$ par les transvections et les dilatations D_α =diag(1,...,1,α) où α parcourt $\mathbb{K}^*$

FIN