Feuille d'exercices : *Espaces vectoriels.*

MP-Prépas Thalés.
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

Rabat, 2006-2007

1) Soient F, G, H trois sous-espaces d'un espace vectoriel E.
Montrer que : $F \cap (G + (F \cap H)) = (F \cap G) + (F \cap H)$.

2) Soient F, G, F', G' des sev d'un ev E.
Montrer que si $F \cap G = F' \cap G'$ alors $\big(F + (G \cap F')\big) \cap \big(F + (G \cap G')\big) = F$.

3) Soit E un $\mathbb{K}$-ev non nul et $F_1, \dots, F_n$ des sev stricts de E.
On veut montrer que $E \neq F_1 \cup \dots \cup F_n$:

a) Traiter le cas $n = 2$.

b) Cas général : on suppose $F_n \not\subset F_1 \cup \dots \cup F_{n-1}$ et on choisit $\vec{x} \in F_n \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_{n-1})$ et $\vec{y} \notin F_n$.

i. Montrer que : $\forall\ \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda\vec{x} + \vec{y} \notin F_n$.

ii. Montrer que : $\forall\ i \leq n-1$, il existe au plus un $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda\vec{x} + \vec{y} \in F_i$.

iii. Conclure.

4) Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, F_1, F_2, ..., F_n des sev de E tels que $F_1 + \dots + F_n = E$. Montrer qu'il existe des sev $G_1 \subset F_1$, ..., $G_n \subset F_n$ tels que : $G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n = E$.

5) Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $E_1, \dots, E_n$ des sev tels que $E_1 \oplus \dots \oplus E_n = E$, F un autre sev de E, et $F_i = E_i \cap F$.

a) Montrer que la somme $G = F_1 + \dots + F_n$ est directe.

b) Comparer F et G.

6) Dans $\mathbb{K}^3$, on donne les sous espaces suivant :
$G = \{\overrightarrow{X} = (x, y, z)$ tel que : $x + y + z = 0\}$
$H = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{U} = (1, 1, 2))$

a) Déterminer $\dim G$ et en donner une base.

b) Démontrer que $G \oplus H = \mathbb{K}^3$.

7) Soit $E = H \oplus K$ et $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k)$ une base de K.

a) Montrer que pour tout $\vec{a} \in H$, $K_{\vec{a}} = \mathrm{vect}(\vec{e}_1 + \vec{a}, \dots, \vec{e}_k + \vec{a})$ est un supplémentaire de H.

b) Montrer que si $\vec{a} \neq \vec{b}$, alors $K_{\vec{a}} \neq K_{\vec{b}}$.

8) Soit E un ev de dimension finie et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces de E. On note $H = \bigcap\limits_{i \in I} F_i$ et $S = \sum\limits_{i \in I} F_i = \mathrm{Vect}\Big(\bigcup\limits_{i \in I} F_i\Big)$.
Montrer qu'il existe une partie finie, J, de I telle que :
$H = \bigcap\limits_{i \in J} F_i$ et $S = \sum\limits_{i \in J} F_i$.

9) Soient H, K deux sev d'un ev E de dimension finie.
Montrer, par récurrence sur $\operatorname{codim} H$, que :
$\dim H = \dim K$ si et seulement si H et K ont un supplémentaire commun.

10) Soit E un espace vectoriel, $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ une famille libre de vecteurs de E, et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des scalaires.

On pose $\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$, et $v_i = \vec{x}_i + \vec{y}$.

Montrer que : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq -1$ est une CNS pourque la famille $(v_1, \dots, v_n)$ soit libre.

11) Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $E_1, \dots, E_n$ des sev tels que $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n = E$.
Soient $u_1 \in \mathcal{L}(E_1), \dots, u_n \in \mathcal{L}(E_n)$.

a) Montrer qu'il existe un unique endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout i : $u_{|F_i} = u_i$.

b) Montrer que : $\begin{array}{l}\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(u_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(u_n) \\ \operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(u_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im}(u_n)\end{array}$.

12) Fonctions affines par morceaux.
Soit $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ une subdivision de $[0, 1]$ et F l'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues dont la restriction à chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est affine.

13) Polynômes trigonométriques.
Soit E l'ev $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$,
F le sev engendré par les fonctions $f_n : x \mapsto \cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$.
G le sev engendré par les fonctions $g_n : x \mapsto \cos^n x$, $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que $F = G$.

14) Supplémentaire commun, X, MP*, 2005.

a) Soit $A = \{P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $P = (1 - X)Q(X^2)$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]\}$.

   i. Montrer que A est un $\mathbb{R}$-ev et que l'on a :
   $R[X] = A \oplus \{$ polynômes pairs $\}$.
   A-t-on $R[X] = A \oplus \{$ polynômes impairs $\}$?

b) Soient E_1, E_2 deux sev d'un ev E tels que E_1 et E_2 sont isomorphes et $E = E_1 \oplus E_2$.
Montrer que E_1 et E_2 ont un supplémentaire commun.

15) Éléments algébriques.
Soient $\mathbb{K}, \mathbb{L}$ deux corps avec $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$.
Un élément $\alpha \in \mathbb{L}$ est dit algébrique sur $\mathbb{K}$ s'il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$.

a) Montrer que α est algébrique sur $\mathbb{K}$ si et seulement si $\mathbb{K}[\alpha] = \{P(\alpha)$ tel que : $P \in \mathbb{K}[X]\}$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

b) On suppose que α et β sont algébriques sur $\mathbb{K}$. Montrer que $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ sont algébriques sur $\mathbb{K}$.

Indication : Étudier $\mathbb{K}[\alpha, \beta]$.

16) Surcorps de $\mathbb{R}$.
Soit $\mathbb{A}$ une $\mathbb{R}$-algèbre commutative, intègre et de dimension finie.

a) Montrer que $\mathbb{A}$ est un corps.

b) Si $\dim \mathbb{A} > 1$ montrer que tout élément de $\mathbb{A}$ est algébrique de degré 1 ou 2 sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire qu'alors $\mathbb{A}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

17) Corps emboités.
Soient $\mathbb{H} \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ trois sous-corps de $\mathbb{C}$.

a) Montrer que $\mathbb{K}$ et $\mathbb{H}$ sont des $\mathbb{L}$-ev et $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{K}$-ev.

b) Montrer que $\mathbb{L}$ est de dimension finie sur $\mathbb{H}$ si et seulement si $\mathbb{K}$ est de dimension finie sur $\mathbb{H}$ et $\mathbb{L}$ est de dimension finie sur $\mathbb{K}$.

c) *Application :* Montrer que $\overline{\mathbb{Q}}$, la cloture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$, est un corps algébriquement clos.
Indication : si $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$, considérer le sous-corps de $\mathbb{C}$ engendré par les coefficients de P.

$\boxed{\text{Fin.}}$