Feuille d'exercices : *Espaces vectoriels euclidiens.*

MP-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Source disponible sur :
©http://www.chez.com/myismail

Exercice 1. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Montrer que com(M) est aussi symétrique.*

Exercice 2. *Soit $u : E \longrightarrow E$ telle que : $\forall (x,y) \in E^2$ on a : $(u(x) \mid y) = (x \mid u(y))$.*
Montrer que u est linéaire.

Exercice 3. *Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $M = (a_i a_j)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
Montrer que M est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

Exercice 4. *On pose pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$: $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\ dt$ et on considère*

$$u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[x] \\ P(x) & \longmapsto & 2xP'(x) + (x^2-1)P''(x). \end{array}$$

Montrer que l'on définit un produit scalaire et que u est un endomorphisme auto-adjoint.

Exercice 5. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint. Montrer que :*

$$\ker u \overset{\perp}{\oplus} \text{ Im } u = E$$

Exercice 6. *Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoints. Montrer que : $u \circ v$ est auto-adjoint si et seulement si $u \circ v = v \circ u$.*

Exercice 7. *Soient p, q deux projecteurs orthogonaux.*

1) *Montrer que $p \circ q \circ p$ est auto-adjoint.*

2) *Montrer que : $(\text{ Im } p + \ker q) \overset{\perp}{\oplus} (\ker p \cap \text{ Im } q) = E$.*

3) *En déduire que $p \circ q$ est diagonalisable.*

Exercice 8. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.*

1) *Montrer que les valeurs propres de M sont imaginaires pures.*

2) *Montrer que $\ker f \perp \text{ Im } f$.*

3) *En déduire que $g = f_{\mid \text{ Im } f}$ est un isomorphisme de Im f.*

4) *Montrer que g^2 est diagonalisable.*

5) *En déduire que rg(M) est pair.*

Exercice 9. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive.*
Montrer qu'il existe une unique matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive telle que $B^2 = A$.

Exercice 10. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
Montrer que A est symétrique définie positive si et seulement s'il existe $B \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tBB$.

Exercice 11. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = I_n$. Montrer que $A^2 = I_n$.*

Exercice 12. *Soit* $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *symétrique de valeurs propres* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}^2 = \sum_{i}^{n} \lambda_i^2$.

Exercice 13. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *auto-adjoint tel que* $Tr(u) = 0$.

1) *Soit* $(u_1, \ldots, u_n)$ *une base propre pour* u.
On prend $x = u_1 + \cdots + u_n$.
Montrer que x *est non nul et que* $u(x) \perp x$.

2) *En déduire qu'il existe une base orthonormée* $\mathcal{B} = (e_i)$ *telle que :* $\forall\ 1 \leq i \leq n,\ (u(e_i) \mid e_i) = 0$, *où* $n = \dim E$

3) *En déduire la forme de* $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$.

Exercice 14. *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *symétriques, avec* B *définie positive. Montrer que les valeurs propres de* AB *sont réelles.*

Exercice 15. *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *symétriques positives.*
Montrer que $0 \leq Tr(AB) \leq Tr(A)\,Tr(B)$.
Indication : Se ramener au cas où A *est diagonale.*

Exercice 16. *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *symétriques définies positives.*
Montrer que $\det(A + B) \geq \det(A) + \det(B)$.
Indication : Montrer qu'il existe P *inversible telle que* $A = {}^tPP$ *et* $B = {}^tPB'P$ *avec* B' *symétrique définie positive.*

Exercice 17. *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$. *Montrer qu'il existe une base orthonormée* $(e_1, \ldots, e_n)$ *dont l'image par* f *est une famille orthogonale.*
Indication : Soit $\mathcal{B}$ *une BON fixée,* $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(()f)$, $\mathcal{B}'$ *la BON cherchée et* P *la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$. *On veut que* ${}^tM'M'$ *soit diagonale avec* $M' = {}^tPMP$, *cad* ${}^tP{}^tMMP$ *diagonale.*

Exercice 18. *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *symétriques,* λ, λ' *leurs plus petites valeurs propres et* μ, μ' *leurs plus grandes valeurs propres. Montrer que toute valeur propre de* $A + B$ *est comprise entre* $\lambda + \lambda'$ *et* $\mu + \mu'$.

Exercice 19. *Soit* u *un vecteur unitaire de matrice* U *dans une base orthonormée* $\mathcal{B}$.

1) *Montrer que* $U{}^tU$ *est la matrice dans* $\mathcal{B}$ *de la projection orthogonale sur* $Vect(u)$.

2) *Trouver la matrice de la symétrie associée.*

Exercice 20. *Soit* $u \in \mathcal{O}(E)$ *et* F *un sev stable par* u.
Montrer que $F^{\perp}$ *est aussi stable par* u.

Exercice 21. *Pour tous* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *on pose :* $(A \mid B) = tr\ ({}^tAB)$.

1) *Vérifier que c'est un produit scalaire.*

2) *Soit* $P \in \mathcal{O}(n)$. *Montrer que les applications* $\phi_P : A \mapsto AP$ *et* $\psi_P : A \mapsto P^{-1}AP$ *sont orthogonales.*

3) *Réciproquement, si* ϕ_P *ou* $\psi_P \in \mathcal{O}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, *est-ce que* $P \in \mathcal{O}(n)$ *?*

Exercice 22. *Quelles sont les matrices* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *égales à leur comatrice ?*

Exercice 23. *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. *Montrer que* $\det({}^tAA) \geq 0$.

Exercice 24. *Soit* E *un espace vectoriel euclidien et* p, q *deux projections orthogonales.*
Montrer que p *et* q *commutent si et seulement si* $(\ Im\ p \cap\ Im\ q)^{\perp} \cap\ Im\ p$ *et* $(\ Im\ p \cap\ Im\ q)^{\perp} \cap\ Im\ q$ *sont orthogonaux.*

Exercice 25. ***Matrice de Gram.***

1) *Soient $x_1,\dots,x_n$ des vecteurs d'un ev euclidien E, et G leur matrice de Gram.*

a) *Montrer que* $rg(G) = rg(x_1,\dots,x_n)$.

b) *Montrer que* $\det G$ *est inchangé si on remplace* x_k *par* $x_k - \sum_{i\neq k} \lambda_i x_i$.

c) *Soit* $F = Vect(x_1,\dots,x_n)$ *et* $x \in E$. *On note* $d(x,F) = \min(\|x-y\|, y \in F)$.

Montrer que $d(x,F)^2 = \dfrac{Gram(x_1,\dots,x_n,x)}{Gram(x_1,\dots,x_n)}$.

2) *Soit E un espace vectoriel euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $(e_1,\dots,e_n)$ une base quelconque de E. On note G le déterminant de Gram.*

Montrer que $G(u(e_1),\dots,u(e_n)) = (\det u)^2 G(e_1,\dots,e_n)$.

3) *Soit $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base non orthonormée de E, G la matrice de Gram des e_i, $f \in \mathcal{L}(E)$ et M sa matrice dans $\mathcal{B}$.*

a) *Montrer que f est auto-adjoint si et seulement si* ${}^tMG = GM$.

b) *Montrer que f est orthogonal si et seulement si* ${}^tMGM = G$.

Exercice 26. ***Décomposition*** QR, ***Inégalité de Hadamard.***

1) *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale, P, et une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs, T, uniques telles que $M = PT$.*

2) *Application : inégalité de Hadamard.*

Soit E un espace vectoriel euclidien, $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée, et $u_1,\dots,u_n$ des vecteurs quelconques.

Démontrer que $|\det_{(e_i)}(u_j)| \leq \prod_{j=1}^{n} \|u_j\|$.

Étudier les cas d'égalité.

Exercice 27. ***Quotients de Rayleigh.***

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint et $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres.

1) *Montrer que :* $\forall\, x \in E,\ \lambda_1\|x\|^2 \leq (f(x) \mid x) \leq \lambda_n\|x\|^2$.

2) *Montrer que si l'une de ces deux inégalités est une égalité pour un vecteur $x \neq 0$, alors x est vecteur propre de f.*

3) *Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E telle que pour tout i : $(f(e_i) \mid e_i) = \lambda_i$. Montrer que : $\forall\, i,\ f(e_i) = \lambda_i e_i$.*

Exercice 28. ***Rayon spectral.***

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\|f\|^2 = \max\{|\lambda|$ tel que : $\lambda \in Sp(f^* \circ f)\}$.

Exercice 29. ***Centre de O(E).***

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$, et s une réflexion par rapport à un hyperplan H. Soit $u \in H^\perp, u \neq 0$.

1) *Montrer que $f \circ s \circ f^{-1}$ est aussi une symétrie et en donner la base.*

2) *En déduire que f et s commutent si et seulement si u est vecteur propre de f.*

3) *Quel est le centre de $O(E)$?*

Exercice 30. ***Inégalité de Ptolémée.***

Soit E un espace euclidien.

1) *Pour $x \in E \setminus \{0\}$, on pose* $f(x) = \dfrac{x}{\|x\|^2}$.

Montrer que : $\forall\, x,y \in E \setminus \{0\},\ \|f(x) - f(y)\| = \dfrac{\|x-y\|}{\|x\|\,\|y\|}$.

2) *Soient $a,b,c,d \in E$. Montrer que :*

$\|a-c\|\,\|b-d\| \leq \|a-b\|\,\|c-d\| + \|b-c\|\,\|a-d\|$.

Indication : se ramener au cas $a = 0$ et utiliser l'application f.

Fin.