spé1 **série 1:Espaces vectoriels normés**

le 17/9/99

EXERCICE1:

E un evn , $A \subset E, x \in E, A^c$désigne le complémentaire de A dans E.

1) Montrer que : a) $\left(\overset{\circ}{A}\right)^c = \overline{(A^c)}$

b) $d(x,A) = 0$ ssi $x \in \overline{A}$

c) $d(x,A) = d(x,\overline{A})$

2) F sev strict de E , montrer que l'intérieur de F est vide.

EXERCICE2:

$E = C([0,1])$ est muni de la norme: $x \to \|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)|\, dt$

$A = \{ f \in E \text{ tq } f(0) = 0 \}, x : t \to 1$.Calculer $d(x,A)$

EXERCICE3:

(u_n) une suite d'un evn,$va(u_n)_n$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence ;montrer que:

1) $l \in va(u_n)_n \Leftrightarrow \forall\ v \in V(l), \{n \in \mathbf{N} \text{ tq } u_n \in v\}$ est infini.

2) $va(u_n)_n = \bigcap\limits_{n \in \mathbf{N}} \overline{\{u_p, p \geq n\}}$

EXERCICE4:

$E = \mathbf{R}[X]$ est muni de la norme $\| \quad \|_\infty : P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \to \|P\|_\infty = \max\limits_{0 \leq k \leq n} |a_k|$

Montrer que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{X^k}{k} \right)_n$ n'a pas de valeur d'adhérence dans E

EXERCICE5:

$E = \{f \in C^1[a,b] \ / \ f'(a) = f'(b) = 0\}$.

Pour $f \in E$, on note $N_1(f) = \sup\limits_{t \in [a,b]} |f(t)|$ et $N_2(f) = \sup\limits_{t \in [a,b]} \left| f(t) + f'(t) \right|$

1) Vérifier que $N_1 \leq N_2$

2) Montrer que N_2 est une norme sur E,est elle équivalente à N_1?

EXERCICE6:

E un evn , montrer que les seules parties de E à la fois ouvertes et fermées sont $\emptyset$et E

EXERCICE7:

1) Soit G un sous groupe de $(\mathbf{R},+)$, non réduit à$\{0\}$.

$a)$ vérifier que $\alpha = \inf(G \cap \mathbf{R}^{+*})$ est bien défini

$b)$ Si $\alpha > 0$ montrer que $G = \alpha\mathbf{Z}$

$c)$ Si $\alpha = 0$ montrer que G est dense dans $\mathbf{R}$

2) Montrer que $\overline{\{\cos n \ , n \in \mathbf{Z}\}} = [-1, 1]$