spé1
le 20/9/99

série 2:Espaces vectoriels normés

EXERCICE1:

Soient E un evn ,$(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E

1) Montrer que : $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subset \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$,$\bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$,$\overset{\circ}{\overbrace{\bigcap_{i\in I} A_i}} \subset \bigcap_{i\in I} \overset{\circ}{A_i}$,$\bigcup_{i\in I} \overset{\circ}{A_i} \subset \overset{\circ}{\overbrace{\bigcup_{i\in I} A_i}}$

2)Montrer par des exemples que ces inclusions peuvent être strictes

3) Quels sont les inclusions qui deviennent des égalités lorsque I est fini

EXERCICE2:

A une partie d'un evn.Montrer:

1) $Fr(A) \subset A \Leftrightarrow A$ est fermé . 2) $A \cap Fr(A) = \varnothing \Leftrightarrow A$ est ouvert .

EXERCICE3:

E un $\mathbb{k}$ evn ,(x_n) une suite de E vérifiant $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$; $\lambda \in \mathbb{k}$ tel que $|\lambda| < 1$.

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} \lambda^i x_{n-i} = 0$

EXERCICE4:

Soit f une application définie et croissante sur un intervalle [a,b] à valeurs dans **R** telle que $f([a,b]) = [f(a),f(b)]$.Montrer que f est continue.

EXERCICE5:

E un evn .On suppose que: $\exists$(u,v)$\in$ $\mathcal{L}_c(E)^2$ tel que, $uv - vu = id$. $(*)$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*$: $uv^n - v^n u = nv^{n-1}$.

2)En déduire que l'hypothése $(*)$ est impossible.

EXERCICE6:

C([0,1],**R**) est munit de la norme infinie .

Montrer que la forme linéaire : $x \to x(0) - \int_0^1 x$ est continue et déterminer sa norme

EXERCICE7:

$A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{C})$,calculer $\sup_{\|X\|_\infty \le 1} \|AX\|_\infty$ et $\sup_{\|X\|_1 \le 1} \|AX\|_1$

EXERCICE8:

f une forme linéaire , non nulle, sur un evn E ; H son noyau ,a un élément de $E \backslash H$

1) Montrer que f est continue ssi H est fermé , et que dans ces conditions:

$$\|f\| = \frac{|f(a)|}{d(a,H)}$$

2) On suppose f non continue , montrer que H est dense dans E; donner un exemple.

EXERCICE9:

Donner une norme pour laquelle $\mathbb{k}[X]$ n'est pas complet ,de même pour C([0,1],**R**).

EXERCICE10:

D une partie d'un evn E, F un evn complet.
Montrer que $B(\mathrm{D},\mathrm{F})$ est complet ; déduire que $l^{\infty}(\mathrm{F})$ l'est aussi.

EXERCICE11:

E un evn complet ,(F$_n$) une suite décroissante de fermés non vides de E tq le diamètre de F_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
Montrer que l'intersection des F_n est réduit à un point

EXERCICE12:

E un evn complet , $(\mathrm{O}_n)_{n\geq1}$ une suite d'ouverts denses dans E,on se propose de montrer que $\overline{\bigcap_{n\geq1} O_n} = \mathrm{E}$

1)Soit G un ouvert de E.Montrer que l'on peut trouver une suite décroissante de boules$(\mathrm{B}(x_n,\epsilon_n))_{n\geq1}$
avec ,pour tout $n \geq 1 : 0 < \epsilon_n < \frac{1}{n}$ et $\overline{\mathrm{B}}(x_n,\epsilon_n) \subset \mathrm{G} \cap (\bigcap_{i=1}^{n} O_i)$

2) Montrer que $\mathrm{G} \cap (\bigcap_{n\geq1} O_n) \neq \emptyset$ (utiliser l'exercice précédent) ; conclure

EXERCICE13:

D une partie compacte d'un evn $f : D \to D$ une application vérifiant :
$\forall(x,y) \in D^2, x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$
Montrer que f admet un unique point fixe (considérer l'application : $x \to \|f(x) - x\|$)

EXERCICE 14:

E un evn , F un sev fermé de E telle que $F \neq E$

1)Montrer que :$\exists\ x \in E\ tq : \|x\| = 1$ et $d(x,F) \geq 1/2$
2) En déduire que si la dimension de E est infinie alors S(0,1) n'est pas compacte.

EXERCICE15:

Soit p$\in\mathbf{N}^*$; $\mathbb{k} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$
1) Montrer que $GL_p(\mathbb{k})$ est un ouvert dense de $M_p(\mathbb{k})$.(considérer la suite $(A - \frac{1}{n}I_p)_n$)
2) $(A,B) \in M_p(\mathbb{k})^2$ et $\lambda \in \mathbb{k}$, montrer que: $dét(AB\text{-}\lambda I_p) = dét(BA - \lambda I_p)$

EXERCICE16:

E un evn de dimension finie,A une partie non vide de E, x un élément de E.
Montrer qu'il existe a dans $\overline{A}$ tel que :d(x,A)=d(x,a)

EXERCICE17:

$f \in C(\mathbb{R}^+,\mathbb{C})$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{C}$, montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

EXERCICE18:

Montrer qu'une réunion finie de parties compactes ,d'un evn E ,est compacte.

EXERCICE19:

(u_n) une suite de $L(E)$,dim$E = p<+\infty, u \in L(E),$ montrer que :

(u_n) converge vers u dans $L(E)$ $\Leftrightarrow$ $\forall x \in E, (u_n(x))$ converge vers $u(x)$ dans E

$\Leftrightarrow$ $\forall x \in B, (u_n(x))$ converge vers $u(x)$ dans E (B base de E)

$\Leftrightarrow$ $Mat_B(u_n)$ converge vers $Mat_B(u)$ dans $M_p(\mathbb{K})$

EXERCICE20:

1)Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs

2) En déduire que $\{A \in M_n(\mathbb{C})$ /rg(A)=r$\}$ est connexe par arcs .(0≤r ≤ n)