Feuille d'exercices : *Formes quadratiques.*

MP-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Source disponible sur :
©http://www.chez.com/myismail

Exercice 1. *Résoudre dans* $\mathbb{R}^4$: $6x^2+4y^2+2z^2+9t^2-4xz-6ty-6tz=0$

Exercice 2. *F une forme quadratique positive sur un espace vectoriel E*
On suppose qu'il existe $a \in E$ tq $F(a)=0$, montrer que :$\forall x \in E, F(a+x)=F(x)$

Exercice 3. *E un espace Euclidien ,l_1, l_2 deux formes linéaires indépendentes sur E*
Donner la signature de la forme quadratique F dans les cas suivants :

1) $F = l_1 l_2$
2) $F = l_1^2 + c l_1 l_2$
3) $F(x) = ||x||^2 + c l_1(x) l_2(x)$ *où c est un réel donné*

Exercice 4. *Donner dans les cas suivants la signature de la forme quadratique F définie sur $\mathbb{R}^n$par :*

1) $\sum\limits_{1\leq i,j\leq n} i x_i x_j$
2) $\sum\limits_{1\leq i,j\leq n} (i+j)^2 x_i x_j$
3) $\sum\limits_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j$

Exercice 5. $F : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $X \to y_{11}$ *où* $Y = X^2$
Vérifier que F est une forme quadratique sur $M_n(\mathbb{R})$ et préciser sa signature.

Exercice 6. *Soit A une matrice symétrique dont la forme quadratique associée est définie positive.*
B une matrice extraite de A càd $\exists \varphi : [1,p] \to [1,n]$ stric croissante tq $b_{i,j} = a_{\varphi(i)\ \varphi(j)}$
Montrer que $\det B > 0$. *on montrera que B est congruente à I_p*

Exercice 7. *Soit $f_i \in C([0,1],\mathbb{R})$,$1 \leq i \leq n$ et $A = \left(\int_0^1 f_i f_j\right)_{1\leq i,j\leq n}$*
Montrer que : $\det A \geq 0$ *avec égalité ssi $(f_1, ..., f_n)$ est liée*
On pourra introduire la forme quadratique canoniqument associée à la matrice symétrique A

Exercice 8. $A \in M_n(\mathbb{R})$ *tq* $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX = \|X\|^2$

1) *Quel est le rang de A*
2) *Montrer que* ${}^tA = 2I_n - A$

Exercice 9. *E un $\mathbb{R}$ esp vect de dimension finie, F une forme quadratique positive sur E*

1) *Montrer que $\{x \in E \text{ tq } F(x) = 0\}$ est un sev de E de codimension rgF*
2) *Application : $(l_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de formes linéaires sur E, $F = \sum\limits_{i=1}^{p} l_i^2$*
   Montrer que $rgF = rg(l_1, ..., l_p)$.

Fin.