Spé1: Série: formes quadratiques Le 4/2/00

Exercice 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}^4$: $6x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 9t^2 - 4xz - 6ty - 6tz = 0$

Exercice 2 :

F une forme quadratique positive sur un espace vectoriel E

On suppose qu'il existe $a \in E$ tq $F(a) = 0$, montrer que : $\forall x \in E, F(a+x) = F(x)$

Exercice 3 :

E un espace Euclidien , l_1, l_2 deux formes linéaires indépendentes sur E

Donner la signature de la forme quadratique F dans les cas suivants:

1) $F = l_1 l_2$ 2) $F = l_1^2 + c l_1 l_2$ 3) $F(x) = \|x\|^2 + c l_1(x) l_2(x)$ où c est un réel donné

Exercice 4:

Donner dans les cas suivants la signature de la forme quadratique F définie sur $\mathbb{R}^n$ par:

1) $\sum\limits_{1 \le i,j \le n} i x_i x_j$ 2) $\sum\limits_{1 \le i,j \le n} (i+j)^2 x_i x_j$ 3) $\sum\limits_{1 \le i < j \le n} x_i x_j$

Exercice 5:

$F : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, X \to y_{11}$ où $Y = X^2$

Vérifier que F est une forme quadratique sur $M_n(\mathbb{R})$ et préciser sa signature.

Exercice 6:

Soit A une matrice symétrique dont la forme quadratique associée est définie positive.

B une matrice extraite de A càd $\exists \varphi : [1,p] \to [1,n]$ stric croissante tq $b_{i,j} = a_{\varphi(i)\,\varphi(j)}$

Montrer que $\det B > 0$.on montrera que B est congruente à I_p

Exercice 7:

Soit $f_i \in C([0,1],\mathbb{R})$,$1 \le i \le n$ et $A = \left(\int_0^1 f_i f_j\right)_{1 \le i,j \le n}$

Montrer que: $\det A \ge 0$ avec égalité ssi $(f_1,...,f_n)$ est liée

On pourra introduire la forme quadratique canoniqument associée à la matrice symétrique A

Exercice 8:

$A \in M_n(\mathbb{R})$ tq $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX = \|X\|^2$

1) Quel est le rang de A 2) Montrer que ${}^tA = 2I_n - A$

Exercice 9:

E un $\mathbb{R}$ esp vect de dimension finie, F une forme quadratique positive sur E

1) Montrer que $\{x \in E \text{ tq } F(x) = 0\}$ est un sev de E de codimension rgF

2)Application: $(l_i)_{1 \le i \le p}$ une famille de formes linéaires sur $E, F = \sum\limits_{i=1}^{p} l_i^2$

Montrer que $rgF = rg(l_1,...,l_p)$.

Exercice 10:

E un $\mathbb{R}$ esp vect de dimension finie, F une forme quadratique sur E

$\mathbb{P}$ un sev de E tq $F/_{\mathbb{P}}$ est définie positive.

Soit (p,q) la signature de F montrer que $p \ge \dim \mathbb{P}$