© *www.chez.com/myismail*

Spé1: Séries de Fourier Le 11/03/00

Exercice 1:

Soit $f \in CM_{2\pi}$,impair tq $\forall t \in]0,\pi[\ f(t) = 1$.

1)Que vaut $f(n)$, pour $n \in \mathbb{Z}$.

2)Calculer,à l'aide de f,$\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 2:

Soit $f \in CM_{2\pi}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$,$f(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.

Montrer que $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie du graphe de f ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1}(f) = b_{2n}(f) = 0$

Exercice 3:

Soit $f \in C^1_{2\pi}$.

Montrer que $\left|f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\right| \leq \frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi} |f'|^2$

Exercice 4:

Soit $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues paires 2π périodiques .

$\forall x \in \mathbb{R}$,on pose $h(x) = \frac{a_0(f)a_0(g)}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(f)a_n(g)\cos(nx)$

1)Existence et continuité de h

2)Chercher les coefficients de Fourier de h

3)Montrer que $\|h\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty \|g\|_\infty$

Exercice 5:

Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $f \in CM_{2\pi}, f(t) = e^{\alpha t}$ pour $t \in [0,2\pi[$.

Calculer,à l'aide de f,la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+a^2}$

En déduire lavaleur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{e^t-1}dt$

Exercice 6:

Déterminer les solutions 2π périodiques de l'équation différentielle:
$y'' = ye^{ix}$

Exercice 7:

Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$,lorsque la suite $s_n(x) = \sum\limits_{|k|\leq n} \lambda_k e^{ikx}$ est convergente on note sa somme par $s(x)$.

1)Montrer que $s \in C_{2\pi}$ et $c_n(s) = \lambda_n$,dans les cas suivants:

a) s_n converge uniformément sur $\mathbb{R}$ .b) $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

2)Application:

Soit $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to \frac{1}{\cos x + \operatorname{ch}\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Ecrire $s(x)$ sous forme $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k e^{ikx}$,déduire le calcul de $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nx)}{\cos x + \operatorname{ch}\alpha}dx$

Exercice 8:

Soit $a > 0, \forall x \in \mathbb{R}$,on pose $f(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{a^2+(x-2n\pi)^2}$

1)Montrer que f est bien définie $f \in C_{2\pi}$ et f paire.

2) Calculer $a_n(f)$ sachant que $\int_0^{\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}$

3)Déduire une expression simple de f.

Exercice 9:

Soit la suite de polynôme de Bernoulli:$B_0 = 1, B'_{n+1} = B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
$B_n(1) = B_n(0)$ pour tout $n \geq 2$.

Soit $f \in C_{2\pi}$, tq pour tout t $\in [0,2\pi], f(t) = B_{2n}(\frac{t}{2\pi})$.

1)Montrer que f est paire.

2)Calculer les coefficients de Fourier de f

© *www.chez.com/myismail*

3)Déduire que $\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{2}(2\pi)^{2n} B_{2n}(0)$