Spé1: Série:Groupes Le 27/11/99

Exercice1:

$A \in M_n(\mathbb{Z})$ tq $\forall i \in [1,n]$ a_{ii} est impair et si i<j a_{ij} est pair montrer que dét(A)$\neq 0$

Exercice2:

$f : S_n \to Gl(\mathbb{K}^n)$,$\sigma \mapsto u_\sigma$ où u_σ est définie sur la base canonique de$\mathbb{K}^n$ par $u_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$

Vérifier que f est un morphisme de groupe

Application:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ vérifier que A est inversible ,calculer A^{-1}et A^k $1 \leq k \leq n$

Exercice3:(ordre d'une permutation)

Pour $\sigma \in S_n$, on appelle le support de σ l'ensemble $S(\sigma) = \{x \in [1,n], \text{tq } \sigma(x) \neq x\}$

1)Vérifier que $\forall (f,g) \in S_n^2$ a) $S(fg) \subset S(f) \cup S(g)$ où fg désigne fog

b) $S(f^{-1}) = S(f)$ et S(f) stable par f

c)$S(f) \cap S(g) = \emptyset \Rightarrow fg = gf$

2) Soient $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ des permutations de $[1,n]$ à supports deux à deux disjoints .

Montrer que $f_1 ... f_p = id \Rightarrow f_1 = ... = f_p = id$

3) Soit $\sigma \in S_n$, on la décompose en produit de cycles $(c_i)_{1 \leq i \leq p}$ à supports disjoints

Montrer que l'ordre de σest ppcm$(l_i)_{1 \leq i \leq p}$ où l_i est la longeur de c_i .(le cardinal de S(c_i))

4) Application:

Soit $\sigma \in S_{10}$ définie par:$\sigma = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10 \\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 2\ 1\ 9\ 8\ 10 \end{pmatrix}$calculer l'ordre de σ puis σ^{2000}

Exercice4: (caractérisation des sous groupes d'un groupe cyclique)

Soit G un groupe cyclique d'ordre n,a un générateur de G,$G_d = \{x \in G \text{ tq } x^d = 1\}$

1)Soit (c,d)$\in \mathbb{N}^2$tq cd=n ,montrer que $G_d = < a^c >$ et card $G_d = d$

2)Soit H un sous groupe de G

a) Justifier l'existence d'un plus petit p$\in \mathbb{N}^*$ tq $a^p \in$H

b) Montrer que p$|$ n et que H=$< a^p >$=G_q où pq=n

c) Déduire une bijection entre les sous groupes de G et les diviseurs de n.

Application:

1) Soit k$\in \mathbb{Z}$,déterminer en fonction de $n \wedge k$ le couple (p,q) réalisant :

pq=n et $< a^k > = < a^p >$=G_q

2)Soit H un sous groupe fini de $(\mathbb{C}^*, \times)$ montrer que:$\exists n \in \mathbb{N}^*$ tq H=U_n

Exercice5:(groupe dihédral)

Pour k$\in [0, n-1]$ A_k est le point de $\mathbb{R}^2$ d'affixe $\exp(\frac{2k\pi}{n} i), E = \{A_0, ..., A_{n-1}\}$,r=Rot$(0, \frac{2\pi}{n})$.

Soit G={g$\in O(\mathbb{R}^2)$ tq g(E)=E} ,$G^+ = O^+(\mathbb{R}^2) \cap G$,$G^- = G \backslash G^+$.

1)Vérifier que G et G^+ sont des sous groupes de $O(\mathbb{R}^2)$, et que G^+opére sur E par g.x=g(x).

2)Montrer qu' il ya une seule orbite ,puis que l'application: $G^+ \to E, g \mapsto g(A_0)$ est bijective.

3)Déduire que G^+ est le groupe cyclique d'ordre n engendré par r.

4)En considérant la symétrie s d'axe OA_0 donner une bijection entre G^+ et G^-, déduire G.