spé1: Série:intégration sur un intervalle quelconque Le 20/01/00

Exercice 1:

Calculer la limite de chacune des intégrales suivantes quand n tend vers l'infini:

1)$\int_0^\infty \frac{ne^{-nx}}{1+x^2}dx$ 2)$\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{(1+\frac{t}{n})^n}dt$ 3)$\int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{t^n}{1-t}dt$

Exercice 2 :

Soient f et $g : I \to \mathbb{C}$ c.p.m tel que $\forall t \in I, |g(t)| < 1;$ on suppose que f et $\frac{f}{1-g}$ sont intégrables sur I

1)Vérifier que:$\forall n \in \mathbb{N}$, fg^n est intégrable sur I.

2)Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \int_I fg^n$ est convergente et a pour somme $\int_I \frac{f}{1-g}$

Exercice 3 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications réelles c.p.m et intégrables sur un intervalle I

On suppose que ,la série $\sum u_n$ vérifie le critère de convergence des séries alternées et que sa somme S est c.p.m sur I.

Montrer que S est intégrable sur I et que $\int_I S = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I u_n$

Exercice 4 :

Soit $g : x \to \int_0^\infty \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}dt$

1)Montrer que g est définie et de classe C^{1}sur $\mathbb{R}$.

2)déduire une expression de g à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 5 :

Calculer $\lim_{x\to 0^+} \Gamma(x), \lim_{x\to+\infty} \frac{\Gamma(x)}{x}$. ($\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$)

Montrer qu'il existe un unique c$\in]0,\infty[$ tq $\Gamma'(c) = 0$

En déduire le tableau de variation de la fonction Γ

Exercice 6 :

Donner la nature de la série $\sum \frac{\cos(\ln n)}{n}$

Exercice 7 :

Soit γ la constante d'Euler. ($\gamma = \lim_{n\to\infty} u_n$ où $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$).

Déterminer deux constantes a et b tq $u_n = \gamma + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$

Exercice 8 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue intégrable,pour a$\in \mathbb{R}$,on définit $f_a : t \mapsto f(a+t)$

Vérifier que f_a est aussi intégrable sur $\mathbb{R}$,puis:

1)Montrer que pour $c \in \mathbb{R}$,$0 \leq \int_{\mathbb{R}} |f| + |f_a| - |f - f_a| \leq 2\int_{-\infty}^{c} |f| + 2\int_{c}^{+\infty} |f_a|$

2)Déduire le calcul de $\lim_{a\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} |f - f_a|$

Exercice 9 :

Doner un équivalent en 1^- de $g : x \to \int_0^1 t^{-x}\sqrt{1+t}\,dt$

Exercice 10 :

1)Etudier la série de terme général $u_n = \int_0^\pi \exp\left(-(n\pi)^\alpha \sin^2 x\right) dx$

2)En déduire ,selon les valeurs de α, l'intégrabilité sur $\mathbb{R}^+$de f: $x \to \exp\left(-x^\alpha \sin^2 x\right)$