spé1 **série :Intégration sur un segment** le 15/11/99

EXERCICE 1:

$f,g\ :]0,a] \to \mathbb{R}^+$ deux applications continues,tq $f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} g(t)$.

Montrer que:$\int_x^{2x} f \underset{x\to 0^+}{\sim} \int_x^{2x} g$.Application:Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{1}{\sin t}\,dt$

En suivant un raisonnement analogue calculer : $\lim\limits_{x\to 1} \int_x^{x^2} \frac{1}{\operatorname{Ln} t}\,dt$

EXERCICE 2:

Soit $\alpha > 0$,calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{t^{n\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt$ déduire que $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n\alpha}$

EXERCICE 3 :

Montrer que pour $x\in [0,1]$ $\operatorname{Arctg}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ puis:$\int_0^1 \frac{Arctg(x)}{x}\,dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$

EXERCICE 4 :

a étant un réel non nul donné,établir la convergence de la série $\sum\limits_{k\geq 0} (-1)^k \frac{a^{2k}}{(2k)!}$.

Calculer sa somme et donner un équivalent de son reste lorsque n tend versl'infini.

EXERCICE 5:

$f\ :\ [0,1] \to \mathbb{R}$ continue montrer que $\int_0^1 t^n f(t)\,dt \underset{n\to\infty}{=} \frac{f(1)}{n} + o(\frac{1}{n})$

On suppose f de classe C^1déterminer un réel a tq :$\int_0^1 t^n f(t)\,dt \underset{n\to\infty}{=} \frac{f(1)}{n} + \frac{a}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$

EXERCICE 6:

On pose ,pour tout entier naturel n: $I_n = \int_1^2 (\ln x)^n dx$

1)Etablir,pour tout entier naturel n : $I_n = \frac{2(\ln 2)^{n+1}}{n+1} - \frac{I_{n+1}}{n+1}$

2)Déduire que: a) $I_n \underset{n\to\infty}{=} O(\frac{(\ln 2)^n}{n})$ puis $I_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{a(\ln 2)^n}{n}$ où a est une constante à déterminer

b) $I_n \underset{n\to\infty}{=} (\ln 2)^n[\frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})]$ où b est une constante à déterminer

EXERCICE 7:

$f\ :]a,b] \to \mathbb{R}$ de Classe C^n, on suppose que $f^{(n)}$ admet une limite finie à droite en a.

Montrer que f se prolonge en une fonction de classe C^nsur [a,b]

EXERCICE 8:

Soit $g\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue T périodique .

1)Montrer que pour $(c,d)\in \mathbb{R}^2$ $\lim\limits_{n\to\infty} \int_c^d g(nx)\,dx = \frac{d-c}{T}\int_0^T g$

2)$f\ :\ [a,b] \to \mathbb{C}$ continue,montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b g(nx)f(x)\,dx = \frac{1}{T}\int_0^T g \int_a^b f$

On commencera par f en escalier.

Application:Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{|\sin(nx)|}{1+x^2}\,dx$

EXERCICE 9:

Pour $n\in \mathbb{N}$,on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,dx$.

1)Donner une relation entre I_n et I_{n-2} et en étudiant la monotonie de I_n montrer que $I_n \underset{n\to\infty}{\sim} I_{n-1}$

2) Montrer que la suite (nI_nI_{n-1}) est constante en déduire un équivalent de I_n

EXERCICE 10:

Soit $f_n\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}^+$continue non nulle,telle que $\forall c \in [a,b[\ :\ \int_a^c f_n \underset{n\to\infty}{=} o(\int_a^b f_n)$

Soit $g:[a,b] \to \mathbb{C}$ continue,montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\int_a^b f_n g}{\int_a^b f_n} = g(b)$. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)g(x)dx$