Feuille d'exercices : *Polynômes.*

MP-Maths.
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le reste de la division euclidienne de :

a) X^n par $(X-1)(X-2)$ et par $(X-1)^2$.

b) $(X\cos(\theta) + \sin(\theta))^n$ par X^2+1, où $(\theta \in \mathbb{R})$.

2) Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ le polynome $(X+1)^n - X^n - 1$ est divisible par X^2+X+1 ?

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$ donnés.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z+1)^n = e^{2ina}$.

b) En déduire $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Déterminer la décomposition en facteurs irréductibles de dans $\mathbb{C}[X]$ de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k$.

b) En déduire une expression simple de : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$

5) Déterminer les racines dans $\mathbb{C}$ ainsi que leurs multiplicités du le polynôme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^k (1-X)^{3n-2k} X^k$.

6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la multiplicité de la racine 1 dans le polynôme suivants :

a) $X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$.

b) $X^{2n} - n^2X^{n+1} + 2(n^2-1)X^n - n^2X^{n-1} + 1$.

7) Décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$ les polynômes : X^6+1, $\quad X^8+X^4+1$.

8) Soit $a, b \in \mathbb{K}$, $a \neq b$. On pose $P_k = (X-a)^k(X-b)^{n-k}$. Démontrer que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est libre.

9) **Polynômes d'interpolation de Lagrange.**
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $(r_k)_{1\leq k\leq n}$ réels de $[0,1]$ deux a deux distincts , on pose $L_k(X) = \displaystyle\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \frac{X-r_i}{r_k-r_i}$.

a) Calculer $L_k(r_j)$ pour $1 \leq j,k \leq n$.

b) En déduire que la famille $(L_k)_{1\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

c) Exprimer tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans cette base.

d) En déduire que $\exists ! P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui interpole f aux point $(r_k)_{1\leq k\leq n}$ càd $f(r_k) = P(r_k)$ pour tout $1 \leq k \leq n$

10) Polynômes d'interpolation de Hermite.
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable et $(r_k)_{1\leq k\leq n}$ réels de $[0,1]$ deux a deux distincts ,et

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & \mathbb{R}_{2n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2n} \\ & P & \longmapsto & \varphi(P) = (P(r_1), P'(r_1), .., P(r_n), P'(r_n)) \end{array}$$

a) Montrer que φ est un isomorphisme.

b) En déduire qu'il existe un unique polynôme qui interpole f et dont la dérivée interpole f' aussi aux points $(r_k)_{1\leq k\leq n}$.

11) Polynômes de Legendre.
On pose : $P_n(X) = ((X^2-1)^n)^{(n)}$.

a) Précisez les racines de $(X^2-1)^n$ ainsi que leurs multiplicités.

b) Montrer par récurrence sur $0 \leq k \leq n$ que $((X^2-1)^n)^{(k)}$ admet au moins k racines distinctes dans $]-1,1[$.

c) En déduire que $((X^2-1)^n)^{(n)}$ admet exactement n racines distinctes dans $]-1,1[$.

12) Polynômes de Tchebechev.
On pose : $T_n(X) = \cos(n \arccos(X))$.

a) Trouver une relation de récurrence entre T_{n+1}, T_n, T_{n-1}.

b) Montrer que T_n est un polynôme de degré n , préciser son coefficient dominant.

c) Montrer que $T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$ pout tout réel t.

d) En déduire les racines de T_n.

13) Formule de Van der Monde :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in [[0,n]]$ on pose : $P_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}$

a) Démontrer que $\mathcal{B} = (P_0, \ldots, P_n)$ est une base de :$\mathbb{R}_n[X]$.

b) Calculer les composantes dans $\mathcal{B}$ de $\left(X^n(1-X)^n\right)^{(n)}$.

c) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$.

14) Opérateur des différence finies.
On note $U_p(X) = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-p+1)}{p!}$, $p \in \mathbb{N}$, et

$$\begin{array}{rrcl} \Delta : & \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ & P(X) & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

a) Démontrer que la famille $(U_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

b) Calculer $\Delta^n(U_p)$.
On rappelle que : $\Delta^n = \underbrace{\Delta \circ \ldots \circ \Delta}_{n \text{ fois}}$ et que $\Delta^0(P) = P$.

c) En déduire que : $\forall\ P \in \mathbb{K}_n[X]$, on a :

$$P = P(0) + (\Delta P)(0)U_1 + (\Delta^2 P)(0)U_2 + \cdots + (\Delta^n P)(0)U_n$$

d) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Démontrer que : $P(n) \in \mathbb{Z}, \forall\ n \in \mathbb{Z} \iff$ les coordonnées de P dans la base (U_p) sont entières

e) Soit $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ une fonction quelconque. Démontrer que f est polynomiale si et seulement si : $\exists\ n \in \mathbb{N}$ tel que : $\Delta^n(f) = 0$.

$\boxed{\text{Fin.}}$