Feuille d'exercices : *Réduction des endomorphismes*

MP-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Source disponible sur :
©http://www.chez.com/myismail

Exercice 1. *Soit* $E = \mathbb{K}_n[X]$ *et* $u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & (X-a)P'(X) \end{array}$
Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de u*.*

Exercice 2. *Soit* $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{2n}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_{2n}[X] \\ P & \longmapsto & X(X-1)P'(X) - 2nXP(X) \end{array}$
Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de u*.*

Exercice 3. *Soient* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ *distincts, et* $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \longmapsto & R \end{array}$
où R *est le reste de la division euclidienne de* X^3P *par* $(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$*.*
Chercher les valeurs et les vecteurs propres de φ*.*

Exercice 4. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*. L'endomorphisme* f *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *défini par* $f(M) = \text{tr}\,(A)M + \text{tr}\,(M)A$*.*
Montrer qu'il est diagonalisable si et seulement si $\text{tr}\,(A) \neq 0$ *ou* $A = 0$*.*

Exercice 5. *Soit* E *le sous-espace vectoriel de* $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ *des fonctions ayant une limite finie en* $+\infty$*. Soit* $T \in \mathcal{L}(E)$ *défini par :*
$T(f)(x) = f(x+1)$*. Montrer que* $Spec_{\mathbb{R}}(T) =]-1, 1]$*.*

Exercice 6. *Soit* $E = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *continues tel que :* $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = 0\}$, $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x \end{array}$ *et* $u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f \circ \varphi. \end{array}$
Montrer que u n'a pas de valeurs propres
Indication : si $u(f) = \lambda f$*, étudier les limites de* f *en* 0 *ou* ∞*.*

Exercice 7. *Soit* $C = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ *et* $M = C^tC$*.*

1) *Chercher le rang de* M*.*
2) *En déduire le polynôme caractéristique de* M*.*
3) M *est-elle diagonalisable ?*

Exercice 8. *Soit* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $a_{ij} = \dfrac{i}{j}$*.*

1) *Chercher le rang de* M*.*
2) *En déduire le polynôme caractéristique de* M*.*
3) M *est-elle diagonalisable ?*

Exercice 9. *Soient* $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{C}$*.*
Calculer $\Delta_n = \det(I + (x_iy_j))$*.*
Indication : Déterminer $\chi_M(X)$ *où* $M = (x_iy_j)$

Exercice 10. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et $B = A^{-1}$, $C = A^2$.*

Montrer que : $\chi_B(X) = \dfrac{(-X)^n}{\det(A)}\chi_A\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

$\chi_C(X^2) = \chi_A(X)\chi_A(-X)$

Exercice 11. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, on suppose que $\exists p \in \mathbb{N}^*$, tel que : A^p soit diagonalisable.*

1) *Montrer que A est diagonalisable.*

2) *Si A n'est pas inversible la conclusion subsiste-t-elle ?*

Exercice 12. ***Matrices stochastiques.***
Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :
$\forall 1 \leq i, j \leq n \quad m_{ij} \geq 0$
$\forall 1 \leq i \leq n \quad m_{i,1} + m_{i,2} + \cdots + m_{i,n} = 1.$

1) *Montrer que 1 est valeur propre de M.*

2) *Soit λ une valeur propre complexe de M.*

a) *Montrer que $|\lambda| \leq 1$*
Indication : Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre associé, considérer le coefficient x_k de plus grand module.

b) *Montrer que si tous les coefficients m_{ij} sont strictement positifs alors $|\lambda| = 1 \Longrightarrow \lambda = 1$.*

Exercice 13. ***AB et BA ont même polynôme caractéristique.***
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) *Montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres.*

2) *Montrer que si A ou B est inversible, alors AB et BA ont même polynôme caractéristique.*

3) *Dans le cas général, on note :*
$M = \begin{pmatrix} BA & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & AB \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}$
$(M, N, P \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K}))$.
Vérifier que $MP = PN$, montrer que P est inversible, et conclure.

Exercice 14. ***Matrice compagnon.***

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ a_2 & 0 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & & 1 \\ a_n & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ *où les a_i sont des réels positifs ou nuls, avec $a_1 a_n > 0$.*

1) *Montrer que le polynôme caractérique de A est :*
$\chi_A(X) = (-1)^n(X^n - a_n X^{n-1} - \cdots - a_1)$.

2) *Montrer que A admet une unique valeur propre $r > 0$ et que l'on a : $r < 1 + \max(a_1, \ldots, a_n)$.*
Indiacation : Étudier la fonction de $x \mapsto \dfrac{x^n - a_n x^{n-1} - \cdots - a_1}{x^n}$.

3) *Soit λ une valeur propre complexe de A.*
Montrer que $|\lambda| \leq r$ et $|\lambda| = r \Longrightarrow \lambda = r$.

4) *Montrer qu'il existe un entier k tel que A^k a tous ses coefficients strictement positifs.*

Exercice 15. ***Centrale PSI 1998.***
Soient u, v, h trois endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ tels que : $u \circ v = v \circ u, u \circ h - h \circ u = -2u, v \circ h - h \circ v = -2v$.

1) *Que peut-on dire de $\mathrm{tr}\,(u)$ et $\mathrm{tr}\,(v)$?*

2) *Montrer que u et v sont non inversibles. Montrer que $\mathrm{Ker} u$ et $\mathrm{Ker} v$ sont stables par h.*

3) *Déterminer $u^k \circ h - h \circ u^k$ pour $k \in \mathbb{N}$. Déterminer $P(u) \circ h - h \circ P(u)$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$.*

4) *Quel est le polynôme minimal de u ?*

Fin.