spé1 **série 3**:séries en dimension finie

le 12/10/99

EXERCICE 1:

Déterminer la nature de la série de terme général:

1) $\frac{1}{n^a \ln^b n}$ 2) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^a}$ 3) $\sin(\pi\sqrt{n^2-n})$ 4) $\frac{(\ln(n))^n}{n!}$

5) $e-(1+\frac{1}{n})^n$ 6) $\frac{n^a}{\prod_{p=1}^{n} 1+a^p}$

EXERCICE2:

Calculer la somme de la série de terme général:

1) $\frac{1}{n(n^2-1)}$ 2) $\operatorname{Arctan}(\frac{1}{n^2+n+1})$ 3) $\frac{n^3}{n!}$ 4) $\ln(\cos(\frac{a}{2^n}))$ 5) $n\, x^n \cos(na)$ $(a \in \mathbb{R}, |x| < 1)$

EXERCICE3:

Soient $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites à termes >0 .

1)Montrer que: $\exists c > 0$ tel que $a_n \sim c\ b_n \iff$ la série $\sum \ln(\frac{a_{n+1}}{a_n} / \frac{b_{n+1}}{b_n})$ est convergente

2) Application: Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$, montrer que :i)$\exists c > 0$ tel que $\frac{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{n!} \sim c\ n^a$

ii)$\exists c > 0$ tel que $n! \sim c\sqrt{n}\ (\frac{n}{e})^n$

EXERCICE4:

$a$ et $b$ deux éléments d'une algébre normée de dimension finie ,tels que $ab = ba$.Montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N}\quad \left\| \sum_{k=0}^{2n} \frac{(a+b)^k}{k!} - \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{a^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{b^j}{j!}\right) \right\| \le \sum_{k=0}^{2n} \frac{(\|a\|+\|b\|)^k}{k!} - \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\|a\|^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{\|b\|^j}{j!}\right)$$

En déduire que: $\exp(a+b) = \exp(a)\ \exp(b)$

EXERCICE5:

*Soit* $\sum u_n$ une série à termes >0,$S_n$ sa somme partielle.

Montrer que les séries $\sum \frac{u_n}{S_n}$ et $\sum u_n$ sont de même nature.

EXERCICE6:

Soit $\sum u_n$ une série telle que sa suite $S_n$ des sommes partielles est bornée,$(\varepsilon_n)$ une suite décroissante qui converge vers 0.

1) Etablir la transformation d'Abel: $\forall n \in \mathbb{N},\quad \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k u_k = \sum_{k=0}^{n} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) S_k + \varepsilon_{n+1} S_n$ .

2)En déduire que la série $\sum \varepsilon_k u_k$ est convergente,étudier l'exemple $\sum \frac{e^{ina}}{n}$ , $a \in \mathbb{R}$.

EXERCICE7:

$f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$.continue décroissante positive telle que $\lim_{n\to+\infty} \int_1^n f(t)\ dt = +\infty$

Montrer que $\sum_{k=1}^{n} f(k) \sim \int_1^n f(t)\ dt$

EXERCICE8:

Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on définit $b_n = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} C_n^k\ a_k$

1)Montrer que la convergence de la suite $(a_n)$ entraine celle de $(b_n)$.

2)Montrer que la convergence de la série$\sum a_n$ donne celle de $\sum b_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ .

indication: vérifier que $B_n = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1}\ A_k$ $(A_n, B_n$ les sommes partielles de $(a_n)$et$(b_n)$ )