Spé1: Série:familles sommables et séries entières Le 29/01/00

Exercice 1:

Discuter selon α la sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\right)_{p,q\geq 1}$

Exercice 2:

Justifier l'égalité: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n} = \sum_{p=1}^{\infty} x^p \zeta(p+1)$ où $x \in]-1,1[$

Exercice 3:

Montrer que la famille $\left(\frac{(-1)^k}{kn^k}\right)_{k,n\geq 2}$ est sommable ,en déduire l'égalité: $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\zeta(k) = \gamma$

où γ désigne la constante d'Euler

Exercice 4 :

Montrer que la famille $\left(2^{-(p+q)^2-4q}\right)_{p,q\geq 0}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice 5 :

Comparer les rayons de convergence de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ dans les cas suivants:

1) $b_n = O(a_n)$ 2) $b_n \sim a_n$ 3) $|a_n| \leq |b_n| \leq n^\alpha |a_n|$ 4) $|b_n| = |a_n|^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 6 :

$(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,on suppose que les a_n sont non nuls à partir d'un certain rang,et soit R le rayon de la série entière $\sum a_n z^n$.

1)On suppose que les séries $\sum a_{2n} z^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} z^{2n+1}$ont même rayon deconvergence R'
   Montrer que $R' = R$

2) Montrer que si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$tend vers $L \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$alors $R = \frac{1}{L}$.(avec $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$)

3)Déduire que si $\left|\frac{a_{n+2}}{a_n}\right|$tend vers L alors $R = \frac{1}{\sqrt{L}}$

Exercice 7 :

Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ dans le cas où a_n est:

1) $F(n)\ln^\alpha n$, où F est une fraction rationnelle,$\alpha \in \mathbb{R}$.

2) $\cos n$ 3)$(\sqrt{n})^n$ 4) $a_n = E(\sqrt{n+1}) - E(\sqrt{n})$

Exercice 8 :

Soit$\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R, on pose $A_n = a_0 + ... + a_n$ et soit R' le rayon de convergence de la série entière $\sum A_n z^n$

1)Montrer que si $R = 1$ alors $R' = 1$

2) Donner un exemple où $R \neq R'$

3)Montrer que les séries $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ et $\sum \frac{A_n}{n!} z^n$ ont même rayon de convergence.

Exercice 9 :

Calculer les sommes des séries entières suivantes en précisant le rayon de convergence:

1) $\sum_{n\geq 2} \frac{x^{2n+1}}{n^2-1}$ 2) $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n\alpha}{n} x^n$ 3)$\sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$

Exercice 10:

1)Donner le développement en séries entières de f en précisant le rayon de convergence:

$a)$ $f(x) = \ln(1 + 2x\cos\theta + x^2), \theta \in \mathbb{R}$.

$b)$ $f(x) = Arctg(1-x)$

2)Soit $f : x \to \sin(\sqrt{1+x^2})$ Vérifier que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients polynomiaux.

Déduire que f est développable en série entières au voisinage de 0 et préciser une relation récurrente entre les coefficients a_n du développement de f.

Exercice 11:

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R \geq 1$,on note sa somme par $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

1)calculer $\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt \quad ,0 < r < R.$

2) a)On suppose que f est bornée sur $D(0,1)$ et $(a_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.Montrer que f est polynomiale.

b)On suppose que $R = +\infty,$ et f bornée sur $\mathbb{C}$,montrer que f est constante

Exercice 12:

Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$ et $(b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tq $\frac{b_n}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{C}$ et la série $\sum a_n x^n$ admet un rayon $R \geq 1$

Soit R'le rayon de la série $\sum b_n x^n$ vérifier que $R' \geq R.$

Si t$\in]-R,R[$,on note $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ et $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$

1)Montrer dans les cas suivants que $\lim\limits_{t\to R, t<R} \frac{P(t)}{f(t)} = 0,$ où P est polynomiale :

$a)$ la série $\sum a_n$ diverge ,(vérifier que dans ce cas $R = 1$). $\qquad b)$ $R = +\infty.$

2) Déduire que dans chacun des cas précédents $\lim\limits_{t\to R, t<R} \frac{g(t)}{f(t)} = l$

3) Application:Donner un équivalent simple de :

a)$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin\frac{1}{n}$,quand $x \to 1^-$, b)$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\sqrt{1+n^2}$, quand $x \to +\infty$